UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

54. BAND, 3. HEFT
MIT 7 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM JULI 1950)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1950

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

54. Band/3. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Dénes, P. Über den ersten Fall des letzten Fermatschen Satzes 161

Dénes, P. Über die Unlösbarkeit der Diophantischen Gleichung $x^{np}+y^{np}=p^m . z^{np}$ in ganzen Zahlen x, y, z, m, n, wenn p eine reguläre Primzahl ist und $p>3$. 175

Hornich, H. Lösbarkeit einer speziellen Differentialgleichung mit einem Parameter und Transcendenz von Zahlen 183

Picone, M. und **G. Fichera.** Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen 188

Peczar, L. Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze 210

Hohenberg, F. Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen . 221

Locher-Ernst, L. Stetige Vermittlung der Korrelationen 235

Lesky, P. Anwendung der Methode Picones auf ein Wärmeleitungsproblem . . . 241

Buchbesprechungen 255

Über den ersten Fall des letzten Fermatschen Satzes.

Von
Peter Dénes, Budapest.

(Eingelangt am 20. Dezember 1949.)

Furtwängler[1] hat, ausgehend aus den Mirimanoff'schen Kongruenzen[4], bewiesen, daß die Gleichung

$$x^p + y^p = z^p, \tag{1}$$

wenn der Körper $k(\zeta)$ der p-ten Einheitswurzeln keine zu den Exponenten 3, 5, 7 oder 11 gehörenden Ideale enthält, nicht mit zu p primen Zahlen von $k(\zeta)$ gelöst werden kann.

Laut Furtwängler gehört ein Ideal zum Exponenten n, wenn seine p-te Potenz ein Hauptideal ist und nach dem Modul $\mathfrak{P}^n$ einer ganzen rationalen Zahl kongruent ist und andererseits, wenn es im Körper $k(\zeta)$ keine Einheit gibt, welche mit dem Letzteren multipliziert, das Produkt mit einer ganzen rationalen Zahl nach $\mathfrak{P}^{n+1}$ kongruent wird.

Im folgenden wollen wir zuerst einfachere Bedingungen aufstellen, daß die Gleichung (1) nicht nur mit rationalen ganzen, zu p primen Zahlen, sondern auch mit den, zu p primen Zahlen des Kreisteilungskörpers $k(\zeta)$ eine Lösung haben könne; im §1 werden wir sehen, daß die originellen Kongruenzbedingungen von Kummer[3] auch in diesem erweiterten Sinne gültig sind.

Im § 2 wird zu den vier Mirimanoff'schen Kongruenzbedingungen noch eine fünfte gefügt und im § 3 fassen wir die hieraus gezogenen Schlüsse zusammen.

Angewandte Symbole: p bezeichnet eine irreguläre Primzahl,

$$\nu = \frac{p-1}{2}, \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

---

[1] *Ph. Furtwängler:* Göttingen 1, Nachrichten, 1910, 554—562.

[2] *D. Hilbert:* Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897. S. 360.

[3] *E. Kummer:* Abh. Akad. Wiss., Berlin, 1857, 41—74.

$k(\zeta)$ ist der zu p gehörige Kreisteilungskörper,
r ist eine primitive Wurzel nach p,
B_k ist die k-te Bernoulli-Zahl,
$\lambda = 1 - \zeta$, $\mathfrak{L} = [\lambda]$.

§ 1.

Satz 1. ξ, η, ψ sind zu $\mathfrak{L}$ prime Zahlen in $k(\zeta)$. Wenn die Gleichung

$$\xi^p + \eta^p + \psi^p = 0 \tag{2}$$

besteht, so müssen sämtliche Kongruenzen

$$B_{\frac{p-i}{2}} \left[\frac{d^i \log (a + b\, e^v)}{d\, v^i} \right]_{v=0} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 3, 5 \ldots p-2) \tag{3}$$

bestehen, in welchen a und b zu p prime Zahlen sind und:

$$\begin{aligned} \xi &\equiv a \pmod{\mathfrak{L}} \\ \eta &\equiv b \pmod{\mathfrak{L}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Beweis. Zerlegt man die Gleichung 2 in Faktoren, so ergeben sich die folgenden p Gleichungen:

$$\xi + \eta\, \zeta^i = \mathfrak{j}_i^p\, \mathfrak{d} \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{5}$$

in welchen $\mathfrak{d}$ der größte gemeinsame Idealteiler der Zahlen $[\xi, \eta]$ ist und $\mathfrak{j}_0, \ldots \mathfrak{j}_{p-1}$ zu $\mathfrak{L}$ prime Ideale in $k(\zeta)$ sind.

Bezeichnet man mit dem Symbol s^g den konjugierten Wert einer Zahl, eines Ideals, bzw. einer Idealklasse, welche durch Anwendung der Substitution $(s^g = \zeta : \zeta^{r^g})$ entsteht, so sind die konjugierten Gleichungen von (5):

$$s^g \xi + s^g \eta \,.\, \zeta^{i+g} = (\underset{\mathfrak{j}_i}{s^g})^p \,.\, s^g \mathfrak{d} \tag{6}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, p-1),$$
$$(g = 1, 2, \ldots, p-2).$$

Laut Hilbert[2] gilt für jede Klasse des Körpers $k(\zeta)$ der Zusammenhang:

$$C^{q_0} (s\, C)^{q_{-1}} (s^2\, C)^{q_{-2}} \ldots (s^{p-2}\, C)^{q_{-p+2}} = 1.$$

Führt man die symbolische Funktion

$$\omega(s) = q_0 + s\, q_{-1} + \ldots + s^{p-2}\, q_{-p+2}$$

ein, so ergibt sich in der einfacheren Schreibweise:

$$C^{\omega(s)} = 1,$$

in welchen q_{-k} den bekannten Wert:

$$q_{-k} = \frac{r\, r_{-k} - r_{-k+1}}{p} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-2)$$

bedeutet.

Dementsprechend ist

$$\mathfrak{j}_i^{\omega(s)}$$

ein Hauptideal und entspricht einer Zahl K_i in $k(\zeta)$. Es können daher aus den Gleichungsscharen (5), (6) die folgenden Gleichungen

$$(\xi + \eta\,\zeta^i)^{\omega(s)} = [K_i]^p\, \mathfrak{d}^{\omega(s)} \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{7}$$

gebildet werden. Dividiert man die i-te Gleichung durch die $(p-i)$-te Gleichung, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left(\frac{\xi + \eta\,\zeta^i}{\xi + \eta\,\zeta^{-i}}\right)^{\omega(s)} = \zeta^{n_i}\, \varepsilon_i\, \frac{K_i^p}{K_{p-i}^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}) \tag{8}$$

aus welchen die Ideale schon entfernt sind. n_i bezeichnet eine ganze Zahl, ε_i ist eine reelle Einheit. Die Gleichungen (8) können auch als Kongruenzen geschrieben werden:

$$\left(\frac{\xi + \eta\,\zeta^i}{\xi + \eta\,\zeta^{-i}}\right)^{\omega(s)} \equiv \zeta^{n_i}\, \varepsilon_i\, u_i \pmod{\mathfrak{L}^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}) \tag{9}$$

wo u_i rationale ganze Zahlen bedeuten. Wendet man die Substitution $(s^{\frac{p-1}{2}} = \zeta : \zeta^{-1})$ an, so entstehen aus (9) die Kongruenzen

$$\left(s^{\frac{p-1}{2}}\, \frac{\xi + \eta\,\zeta^i}{\xi + \eta\,\zeta^{-i}}\right)^{\omega(s)} \equiv \zeta^{-n_i}\, \varepsilon_i\, u_i \pmod{\mathfrak{L}^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}) \tag{10}$$

Aus (9) und (10) resultieren schließlich die Kongruenzen:

$$\zeta^{-2n_i} \left(\frac{\xi + \eta\,\zeta^i}{\xi + \eta\,\zeta^{-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\,\omega(s)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{L}^p} \qquad (i = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}). \tag{11}$$

Zufolge der symbolischen Potenz $(1-s^{\frac{p-1}{2}})$ fallen sämtliche reellen Faktoren aus den Kongruenzen (11) aus, demzufolge, wenn die linke Seite nach $\mathfrak{L}^{2k-1}$ mit 1 kongruent ist, so ist dieselbe auch nach dem Modul $\mathfrak{L}^{2k}$ mit 1 kongruent. Daher, wenn die Kongruenz (11) als ein Polynom von λ ausgedrückt wird, so geben nur die ersten, dritten, fünften, ... $(p-2)$-ten Glieder unabhängige Kongruenzen und mit Rücksicht darauf, daß der Koeffizient der ersten Potenz von λ nur den Wert von n_i bestimmt, ergeben sich letzten Endes $\frac{p-3}{2}$ unabhängige Kongruenz-Bedingungen, welche die Zahlen ξ, η charakterisieren.

Hält man jetzt den Wert i fest, so können die folgenden koordinierten Kongruenzen zu (11) mit Hilfe der Gleichungsschar (6) gebildet werden:

$$\zeta^{-2n_i^{(g)}}\left(\frac{s^g\xi+s^g\eta\zeta^{i+g}}{s^g\xi+s^g\eta\zeta^{-i+g}}\right)(1-s^{\frac{p-1}{2}})\,\omega(s)\equiv 1 \pmod{\mathfrak{L}^p} \qquad (12)$$

$$(i=1,2,\ldots\frac{p-1}{2})$$

$$(g=1,2,\ldots p-1).$$

Schreibt man diese Kongruenzen als Polynome in λ, mit der Bezeichnung $G=r^g$,

$$a_0(G)+a_1(G)\,\lambda+\ldots+a_{p-2}(G)\,\lambda^{p-2}\equiv 1 \pmod{\mathfrak{L}^p}$$

$$(i=1,2,\ldots\frac{p-1}{2})$$

$$(G=1,2,\ldots p-1)$$

in welchen $a_0(G),\ldots a_{p-2}(G)$ ganzzahlige Polynomen von G von höchstens $(p-2)$-tem Grade sind, so müssen laut (12)

$$a_1(G)\equiv 0,\ a_2(G)\equiv 0,\ \ldots,\ a_{p-2}(G)\equiv 0 \pmod{p}$$

sein und diese Kongruenzen müssen bei $(p-1)$ verschiedenen Werten von G gelten; da aber dieselben höchstens vom $(p-2)$-ten Grade sind, sind dieselben alle Identitäten und müssen daher auch bei dem Werte $G\equiv 0 \pmod{p}$ gültig sein.

Aus dieser Überlegung folgt, daß in (11) anstatt ξ, η die rationalen ganzen Zahlen a, b von (4) gesetzt werden können:

$$\zeta^{-2n_i}\left(\frac{a+b\zeta^i}{a+b\zeta^{-i}}\right)(1-s^{\frac{p-1}{2}})\,\omega(s) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}^p}$$

$$(i = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2})$$

aus welchen mit Kummer's Methode die oben erwähnten $\frac{p-3}{2}$ Bedingungen folgen:

$$(1-r^{\frac{p-1}{2}})\,\chi_i(r)\left[\frac{d^i \log(a+be^v)}{dv^i} - \frac{d^i \log(a+be^{-v})}{dv^i}\right]_{v=0} \equiv 0 \pmod{p} \quad (13)$$

$$(i = 3, 5, \ldots p-2),$$

dabei ist:

$$\chi_i(r) = q_0 + q_{-1}r^i + q_{-2}r^{2i} + \ldots + q_{-p+2}r^{(p-2)i} \quad (i = 3, 5, \ldots p-2)$$

Da Kummer bewies, daß $\chi_i(r)$ nur dann durch p teilbar ist, wenn p in $B_{\frac{p-i}{2}}$ aufgeht und da ferner für ungerade Werte von i gilt:

$$-\frac{d^i \log(a+be^v)}{dv^i}_{v=0} \equiv \frac{d^i \log(a+be^{-v})}{dv^i}_{v=0} \pmod{p}$$

$$(i = 3, 5, \ldots p-2),$$

so folgt der Beweis des Satzes 1 unmittelbar aus (13).

Mittels des Satzes 1 können sämtliche Kriterien, welche aus den Kummer'schen Kongruenzen für die Lösbarkeit der Gleichung (1) mit rationalen ganzen, zu p primen Zahlen entwickelt wurden, auch für die, zu p primen Zahlen des zur Primzahl p gehörenden Kreiskörpers verallgemeinert werden. Einige wichtigere Bedingungen werden in den folgenden Sätzen zusammengefaßt.

Satz 2. Wenn p in keinen der Bernoulli'schen Zahlen $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-3}$, $B_{\nu-4}$ aufgeht, so ist die Gleichung

$$\xi^p + \eta^p + \psi^p = 0 \quad (2)$$

mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p relativ prim sind, nicht lösbar.

Beweis. Laut dem Satz 1 müssen die Kummer'schen Kongruenzen erfüllt werden. Andererseits zeigte Mirimanoff[4], daß für die Werte $i = 3, 5, 7, 9$, die Kongruenzen

$$\frac{d^i \log(1+te^v)}{dv^i}_{v=0} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 3, 5, 7, 9)$$

[4] *D. Mirimanoff:* Journ. für Math., 128, 1904, 45–68.

nicht für jedes Glied der möglichen Sechs-Gruppe erfüllt werden können:

$$t;\ \frac{1}{t};\ -1-t;\ -\frac{1}{1+t};\ -\frac{t+1}{t};\ -\frac{t}{1+t}. \tag{14}$$

Mirimanoff[5, 6] warf ferner die Kummer'schen Kongruenzen weiteren Umformungen unter, aus welchen der Satz folgt:

Satz 3. Ist p eine ungerade Primzahl, welche die Bedingungen

$$2^p - 2 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

oder

$$3^p - 3 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

nicht erfüllt, so ist die Gleichung (2) mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p relativ prim sind, nicht lösbar.

In gleicher Weise können noch eine Anzahl Kongruenzbedingungen verallgemeinert werden.

§ 2.

Im folgenden werden wir anstatt der Differential-Quotienten von Kummer die Mirimanoff'schen Polynome[4]:

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} k^{i-1} t^k \qquad (i = 3, 5, \ldots p-2)$$

anwenden, welche dieselben vollkommen ersetzen.

Satz 4. Außer den Werten $i = 3, 5, 7, 9$ gibt es noch wenigstens eine Stelle $i = m$, für welche das Polynom $\varphi_m^{(t)}$ nicht bei jedem der sechs Werte der Gruppe (14) durch p teilbar sein kann.

Beweis. Es soll das Gegenteil angenommen werden, d. h., daß, den Fall $t \equiv 1 \pmod{p}$ ausschließend, die Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(t) &\equiv c_i \pmod{p} \qquad (i = 3, 5, 7, 9) \\ \varphi_i(t) &\equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 11, 13, \ldots p) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

für jeden Wert der Sechs-Gruppe (14) gelten, bemerkend, daß die Zahlen c_3, c_5, c_7, c_9 bei gewissen Gliedern der Gruppe (14) natürlich auch den Wert 0 (mod p) aufzeigen können.

Bildet man die Summe

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{k^{i-1}} \varphi_i(t)$$

---

[5] *D. Mirimanoff:* L'Enseignement Math., 11, 1909, 455–9.

[6] *D. Mirimanoff:* Comptes Rendus, Paris, 150, 1910, 204–6.

so bekommen wir die folgenden $\frac{p-1}{2}$ Kongruenzen:

$$\psi_k = \frac{1}{k^2} c_3 + \frac{1}{k^4} c_5 + \frac{1}{k^6} c_7 + \frac{1}{k^8} c_9 \equiv (-1)^{k-1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot (t^k - t^{p-k}) \pmod{p} \qquad (k = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}) \qquad (16)$$

Wir machen Gebrauch zuerst von den Werten $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Es können stets solche, nicht sämtlich nach p verschwindende ganze Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 bestimmt werden, welche die Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} &m_1 \psi_1 + m_2 \psi_2 + m_3 \psi_3 + m_4 \psi_4 + m_5 \psi_5 \equiv 0 \pmod{p} \\ &m_1 + \frac{m_2}{2^j} + \frac{m_3}{3^j} + \frac{m_4}{4^j} + \frac{m_5}{5^j} \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}\right\} \qquad (j = 2, 4, 6, 8) \qquad (17)$$

erfüllen, da die vier letzteren Gleichungen voneinander unabhängig sind. Eine Lösung ist:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 42 \\ m_2 &= -3.2^{13} = -24576 \\ m_3 &= 3^{12} = 531441 \\ m_4 &= -2^{21} = -2{,}097{,}152 \\ m_5 &= 5^9 = 1{,}953{,}125. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Die gezeichneten Operationen angeführt, wird aus (16) und (17):

$$m_1 (t^4 - t^5) - m_2 (t^3 - t^6) + m_3 (t^2 - t^7) - m_4 (t - t^8) + m_5 (1 - t^9) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (19)$$

Zweitens sollen die Werte $k = \frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2}, \frac{p-5}{2}, \frac{p-7}{2}, \frac{p-9}{2}$ gewählt werden und die Zahlen $n_\nu, n_{\nu-1}, n_{\nu-2}, n_{\nu-3}, n_{\nu-4}$ sind so zu bestimmen, daß sie die Kongruenzgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &n_\nu \psi_\nu + n_{\nu-1} \psi_{\nu-1} + n_{\nu-2} \psi_{\nu-2} + n_{\nu-3} \psi_{\nu-3} + n_{\nu-4} \psi_{\nu-4} \equiv 0 \pmod{p} \\ &n_\nu + \frac{n_{\nu-1}}{3^j} + \frac{n_{\nu-2}}{5^j} + \frac{n_{\nu-3}}{7^j} + \frac{n_{\nu-4}}{9^j} \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}\right\} \qquad (j = 2, 4, 6, 8) \qquad (20)$$

erfüllen, für welche (21) eine Lösung darstellt:

$$\left.\begin{aligned} n_\nu &= 14 \\ n_{\nu-1} &= -28.3^8 = -183708 \\ n_{\nu-2} &= 4.5^9 = 7{,}812{,}500 \\ n_{\nu-3} &= -7^9 = -40{,}353{,}607 \\ n_{\nu-4} &= 3^{16} = 43{,}046{,}721. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Aus (16) und (20) wird wieder eine Kongruenz:

$$n_\nu (t^4 - t^5) - n_{\nu-1}(t^3 - t^6) + n_{\nu-2}(t^2 - t^7) - n_{\nu-3}(t - t^8) + \\ + n_{\nu-4}(1 - t^9) \equiv 0 \pmod p \qquad (22)$$

gewonnen.

Aus (19) und (22) kann das Glied $(1 - t^9)$ eliminiert werden:

$$g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + g_2 t^4 + g_1 t^5 + g_0 t^6 \equiv 0 \pmod p \qquad (23)$$

in welcher:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &\equiv -(n_{\nu-3} m_5 - m_4 n_{\nu-4}) \pmod p \\ g_1 &\equiv (n_{\nu-2} - n_{\nu-3}) m_5 - (m_3 - m_4) n_{\nu-4} \pmod p \\ g_2 &\equiv -\{(n_{\nu-1} - n_{\nu-2} + n_{\nu-3}) m_5 - (m_2 - m_3 + m_4) n_{\nu-4}\} \pmod p \\ g_3 &\equiv (n_\nu - n_{\nu-1} + n_{\nu-2} - n_{\nu-3}) m_5 - (m_1 - m_2 + m_3 - m_4) n_{\nu-4} \pmod p \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Nun werden die Werte $k = 1, 2, 3, 4, 6$ gewählt und bestimmt man die Zahlen m_1', m_2', m_3', m_4', m_6' laut den Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &m_1' \psi_1 + m_2' \psi_2 + m_3' \psi_3 + m_4' \psi_4 + m_6' \psi_6 \equiv 0 \pmod p \\ &m_1' + \frac{m_2'}{2^j} + \frac{m_3'}{3^j} + \frac{m_4'}{4^j} + \frac{m_6'}{6^j} \equiv 0 \pmod p \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$(j = 2, 4, 6, 8)$$

für welche die Gruppe (26)

$$\left.\begin{aligned} m_1' &= 1, & m_2' &= -560 \\ m_3' &= 10935, & m_4' &= -32768 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$m_5' = 34992$$

eine Lösung darstellt, so ergibt sich die Kongruenz:

$$m_1'(t^5 - t^6) - m_2'(t^4 - t^7) + m_3'(t^3 - t^8) - m_4'(t^2 - t^9) - m_6'(1 - t^{11}) \equiv 0 \\ \pmod p \qquad (27)$$

Schließlich werden noch die Werte $k = \frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2}, \frac{p-5}{2}, \frac{p-7}{2}, \frac{p-11}{2}$ in Betracht gezogen und bestimmt man die Zahlen n_ν', $n'_{\nu-1}$, $n'_{\nu-2}$, $n'_{\nu-3}$, $n'_{\nu-5}$ laut den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &n'_\nu\psi_\nu+n'_{\nu-1}\psi_{\nu-1}+n'_{\nu-2}\psi_{\nu-2}+n'_{\nu-3}\psi_{\nu-3}+n'_{\nu-5}\psi_{\nu-5}\equiv 0 \pmod p\\ &n'_\nu+\frac{n'_{\nu-1}}{3^j}+\frac{n'_{\nu-2}}{5^j}+\frac{n'_{\nu-3}}{7^j}+\frac{n'_{\nu-5}}{11^j}\equiv 0 \pmod p\\ &\qquad\qquad (j=2,4,6,8)\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

für welche die Gruppe (29):

$$\left.\begin{aligned} n'_\nu &= 84\\ n'_{\nu-1} &= -2.3^{12} = -1{,}062{,}882\\ n'_{\nu-2} &= 21.5^9 = 41{,}015{,}625\\ n'_{\nu-3} &= -4.7^9 = -161{,}414{,}428\\ n'_{\nu-5} &= 214{,}358{,}881\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

eine Lösung darstellt, so ergibt sich die Kongruenz:

$$n'_\nu(t^5-t^6)-n'_{\nu-1}(t^4-t^7)+n'_{\nu-2}(t^3-t^8)-n'_{\nu-3}(t^2-t^9)- \\ -n'_{\nu-5}(1-t^{11})\equiv 0 \pmod p \quad (30)$$

Aus (27) und (30) folgt:

$$g_0'+g_1't+g_2't^2+g_3't^3+g_2't^4+g_1't^5+g_0't^6\equiv 0 \pmod p \quad (31)$$

wo sind:

$$\left.\begin{aligned} g_0' &\equiv -(n'_{\nu-3}m_6'-m_4'n'_{\nu-5}) \pmod p\\ g_1' &\equiv (n'_{\nu-2}-n'_{\nu-3})m_6'-(m_3'-m_4')n'_{\nu-5} \pmod p\\ g_2' &\equiv -\{(n'_{\nu-1}-n'_{\nu-2}+n'_{\nu-3})m_6'-(m_2'-m_3'+m_4')n'_{\nu-5} \pmod p\\ g_3' &\equiv (n_\nu'-n'_{\nu-1}+n'_{\nu-2}-n'_{\nu-3})m_6'-(m_1'-m_2'+m_3'-m_4')n'_{\nu-5} \pmod p\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Mirimanoff[4] sprach unter den Sätzen über die sechs Wurzeln (14) von einer vollkommenen Gruppe, wenn 6 verschiedene Wurzeln vorkommen. Solch eine vollkommene Gruppe kann leicht ersichtlich nicht gleichzeitig die Kongruenzen (23) und auch (31) erfüllen, da nach der Eliminierung des Gliedes $(1+t^6)$ aus den beiden Kongruenzen, eine Kongruenz von viertem Grade entsteht, welche nicht sechs verschiedene Wurzeln haben kann.

Unter den unvollkommenen Gruppen müssen die Fälle $t^2+t+1\equiv 0 \pmod p$, bzw. $t\equiv -2 \pmod p$ untersucht werden.

Dividiert man die (23) durch (t^2+t+1), so ergibt sich der Rest

$$g_3-g_2-g_1+2g_0\equiv 0 \pmod p,$$

oder, mittels (24)

$$(n_\nu-n_{\nu-2}-n_{\nu-3})m_5-(m_1-m_3-m_4)n_{\nu-4}\equiv 0 \pmod p \quad (33)$$

Gleicherweise wird aus (31)

$$(n_\nu' - n'_{\nu-2} - n'_{\nu-3})\, m_6' - (m_1' - m_3' - m_4')\, n'_{\nu-5} \equiv 0 \pmod{p} \quad (34)$$

Setzt man in (33) die Werte von (18) und (21), so wird

$$3{,}845.655{,}592.788 \equiv 0 \pmod{p} \quad (35)$$

und ebenfalls aus (34), (26) und (29):

$$467.313{,}953.850 \equiv 0 \pmod{p} \quad (36)$$

Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Zahlen ist 2; es gibt also keine irreguläre Primzahl, welche die beiden Kongruenzen (35) und (36) erfüllt.

Wenn andererseits der Wert $t \equiv -2 \pmod{p}$ in (23) gesetzt wird, so entstehen die Kongruenzen:

$$65\, g_0 - 34\, g_1 + 20\, g_2 - 8\, g_3 \equiv 0 \pmod{p}$$

beziehungsweise

$$(8\, n_\nu + 12\, n_{\nu-1} + 22\, n_{\nu-2} + 43\, n_{\nu-3})\, m_5 - (8\, m_1 + 12\, m_2 + \\ + 22\, m_3 + 43\, m_4)\, n_{\nu-4} \equiv 0 \pmod{p} \quad (37)$$

und gleichfalls aus (31):

$$(8\, n'_\nu + 12\, n'_{\nu-1} + 22\, n'_{\nu-2} + 43\, n'_{\nu-3})\, m_6' - (8\, m_1' + 12\, m_2' + \\ + 22\, m_3' + 43\, m_4')\, n'_{\nu-5} \equiv 0 \pmod{p} \quad (38)$$

oder, mittels (18), (21), (26), (29) die Bedingungen:

$$333{,}553.788{,}519.985 \equiv 0 \pmod{p} \quad (39)$$

$$40{,}162.608{,}783.774 \equiv 0 \pmod{p} \quad (40)$$

welche relativ prime Zahlen sind. Es gibt also keine irreguläre Primzahl, welche die beiden Kongruenzen (39) und (40) erfüllt.

Damit ist der Satz 4 vollständig bewiesen.

§ 3.

Der erste Faktor der Klassenanzahl des Körpers $k(\zeta)$ soll durch die f_1-te Potenz von p, der zweite Faktor durch die f_2-te Potenz von p teilbar sein. Ferner sollen $C_1, C_2, \ldots C_{e_1}, D_1, D_2, \ldots D_{e_2}$ unabhängige Idealklassen bezeichnen, von welchen die Klassen $D_1, \ldots D_{e_2}$ zum reellen Unterkörper $k(\zeta + \zeta^{-1})$ gehören, so daß alle Klassen F, deren p-te Potenz die Hauptklasse ist, als ein Potenzprodukt dieser Klassen dargestellt werden kann:

$$F = C_1^{a_1} \cdot C_2^{a_2} \ldots C_{e_1}^{a_{e_1}} \cdot D_1^{b_1} \cdot D_2^{b_2} \ldots D_{e_1}^{b_{e_2}} \qquad \begin{matrix} 1 \leqq a_i \leqq p \\ 1 \leqq b_i \leqq p \end{matrix}$$

Offensichtlich sind

$$e_1 \leqq f_1$$
$$e_2 \leqq f_2.$$

Satz 5. Wenn $e_1 \leqq 4$, so kann die Gleichung

$$\xi^p + \eta^p + \psi^p = 0 \tag{2}$$

nicht mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ bestehen, welche zu p prim sind.

Beweis. Die Klasse des Ideals $\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_{p-1}}$ in den aus (5) gebildeten Gleichungen:

$$\left(\frac{\xi + \eta\zeta^i}{\xi + \eta\zeta^{-1}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_{p-1}}\right)^p \qquad \left(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2}\right)$$

soll mit F_i bezeichnet werden. Die Idealklasse

$$F_i^{1-s^{\frac{p-1}{2}}}$$

ausgedrückt als ein Potenzprodukt der unabhängigen Grundklassen, enthält offensichtlich keine, zu dem reellen Unterkörper $K(\zeta + \zeta^{-1})$ gehörende Grundklasse, da dieselben ausfallen und da ferner laut Annahme $e_1 \leqq 4$ ist, so kann diese Klasse in der Form:

$$F_i^{1-s^{\frac{p-1}{2}}} = C_1^{a_{i1}} \cdot C_2^{a_{i2}} \cdot C_3^{a_{i3}} \cdot C_4^{a_{i4}} \qquad \begin{matrix} 1 \leqq a_{ik} \leqq p \\ (k = 1, 2, 3, 4) \\ \left(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2}\right) \end{matrix} \tag{41}$$

ausgedrückt werden. Die konjugierten Formen der Gleichung (41) sind:

$$F_i^{s^g(1-s^{\frac{p-1}{2}})} = C_1^{a_{i1}^{(g)}} \cdot C_2^{a_{i2}^{(g)}} \cdot C_3^{a_{i3}^{(g)}} \cdot C_4^{a_{i1}^{(g)}} \qquad \begin{matrix} 1 \leqq a_{ik}^{(g)} \leqq p \\ (k = 1, 2, 3, 4) \\ \left(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2}\right) \\ (g = 1, \ldots p-2) \end{matrix} \tag{42}$$

Nun bestimmen wir die Zahlen v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i1}, v_{i5} so, daß wenigstens eine von ihnen nicht durch p teilbar sei und ferner sollen dieselben die folgenden Kongruenzen:

$$v_{i1}\, a_{ik} + v_{i2}\, a_{ik}^{(1)} + v_{i3}\, a_{ik}^{(2)} + v_{i4}\, a_{ik}^{(3)} + v_{i5}\, a_{ik}^{(4)} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

erfüllen, was immer möglich ist, da es 4 Kongruenzen mit 5 Varianten gibt.

$\vartheta(s)$ soll die folgende symbolische Funktion bezeichnen:

$$\vartheta(s) = v_{i1} + s \cdot v_{i2} + s^2 v_{i3} + s^3 v_{i4} + s^4 v_{i5},$$

dann wird aus (41) und (42)

$$F_i^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\vartheta(s)} = 1$$

und dementsprechend in der Gleichung

$$\left(\frac{\xi + \eta_l \zeta^i}{\xi + \eta \zeta^{-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\vartheta(s)} = \left(\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_{p-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}}\vartheta(s) \cdot p} \qquad (43)$$

$$(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2})$$

ist das Ideal $\left(\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_{p-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\vartheta(s)}$ ein Hauptideal. Ähnlich zu (8) und (11), kann aus der Gleichung (43) die Kongruenz

$$\zeta^{-2n_i}\left(\frac{\xi + \eta\zeta^i}{\xi + \eta\zeta^{-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\vartheta(s)} \equiv 1 \qquad (mod\ \mathfrak{L}^p) \qquad (44)$$

$$(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2})$$

gebildet werden, welche mit der Anwendung des Gedankenzuges vom Satz (1) mit der Kongruenz

$$\zeta^{-2n_i}\left(\frac{a + b\zeta^i}{a + b\zeta^{-i}}\right)^{(1-s^{\frac{p-1}{2}})\vartheta(s)} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \mathfrak{L}^p) \qquad (45)$$

$$(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2})$$

ersetzt werden kann, wo a und b mit den Kongruenzen (4) bestimmte rationale ganze Zahlen sind.

Kummer's Methode läßt aus (45) in ähnlicher Weise, wie bei (13), die Bedingung

$$(1 - r^{\frac{p-1}{2}})(v_{i1} + r^g v_{i2} + r^{2g} v_{i3} + r^{3g} v_{i4} + r^{4g} v_{i5})\varphi_g(t) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(g = 3, 5, \ldots p-2) \quad (46)$$

entwickeln, in welcher die originalen Kummer'schen Kongruenzen mit den Polynomen $\varphi_g(t)$ von Mirimanoff[4] ersetzt sind.

Laut Satz 4 ist $\varphi_g(t)$ für die Werte $g = 3, 5, 7, 9, m$ nicht bei jedem Glied der Gruppe (14) durch p teilbar; (46) vereinfacht sich auf die folgenden Bedingungen:

$$v_{i1} + r^g v_{i2} + r^{2g} v_{i3} + r^{3g} v_{i4} + r^{4g} v_{i5} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (g = 3, 5, 7, 9, m) \tag{47}$$

Die Determinante der Kongruenzen (47) ist

$$D = (r^3 - r^5)(r^3 - r^7)(r^3 - r^9)(r^3 - r^m)(r^5 - r^7)(r^5 - r^9) \cdot \\ \cdot (r^5 - r^m)(r^7 - r^9)(r^7 - r^m)(r^9 - r^m)$$

offensichtlich nicht durch p teilbar und deshalb könnten die Kongruenzen (47) nur dann bestehen, wenn die Zahlen $v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, v_{i5}$ sämtlich durch p teilbar wären, was im Widerspruch mit unserer Annahme steht.

Aus dem Satze 5 folgen die milderen Bedingungen:

Satz 6. Wenn der erste Faktor der Klassenanzahl des Körpers $k(\zeta)$ nicht durch p^5 teilbar ist, kann die Gleichung

$$\xi^p + \eta^p + \psi^p = 0 \tag{2}$$

nicht mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p prim sind, gelöst werden.

Satz 7. Wenn die Klassenanzahl des Körpers $k(\zeta)$ nicht durch p^5 teilbar ist, kann die Gleichung (2) nicht mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p prim sind, gelöst werden.

Satz 8. Wenn der erste Faktor der Klassenanzahl des Körpers $k(\zeta)$ höchstens durch die f_1-te Potenz von p teilbar ist, so kann die Gleichung

$$\xi^{p^{f_1-3}} + \eta^{p^{f_1-3}} + \psi^{p^{f_1-3}} = 0 \tag{48}$$

nicht mit den Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p prim sind, gelöst werden.

Beweis. Die Gleichung (48), in Faktoren zerlegt:

$$\xi^{p^{f_1-4}} + \eta_i^{p^{f_1-4}} \zeta^i = \mathfrak{j}_i^{p^{f_1-3}} \cdot \mathfrak{d}^{p^{f_1-4}} \qquad (i = 0, 1, \ldots p-1),$$

kann mit den Bezeichnungen

$$\Xi = \xi^{p^{f_1-4}}, \quad H = \eta^{p^{f_1-4}}, \quad \mathfrak{J}_i = \mathfrak{j}_i^{p^{f_1-4}}$$

zum Satz 5 zurückgeführt werden, da die Idealklasse von $\left(\frac{\mathfrak{J}_i}{\mathfrak{J}_{p-1}}\right)^{1-s^{\frac{p-1}{2}}}$

als ein Potenzprodukt von höchstens vier verschiedenen unabhängigen Grundklassen dargestellt werden kann.

Aus Satz 8 folgt unmittelbar der

Satz 9. Wenn die Klassenanzahl des Körpers $k(\zeta)$ höchstens durch die f_1-te Potenz von p teilbar ist, so kann die Gleichung (48) nicht mit Zahlen des Körpers $k(\zeta)$, welche zu p prim sind, gelöst werden.

Über die Unlösbarkeit der Diophantischen Gleichung $x^{np} + y^{np} = p^m \cdot z^{np}$ in ganzen Zahlen x, y, z, m, n, wenn p eine reguläre Primzahl ist und $p > 3$.

Von
Peter Dénes, Budapest.

(Eingelangt am 20. Dezember 1949.)

$p > 3$ bezeichnet eine reguläre Primzahl, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $k(\zeta)$ ist der Körper der p-ten Einheitswurzel, $k(\zeta + \zeta^{-1})$ ist der reelle Unterkörper von $k(\zeta)$. $\Lambda = (1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})$, $\mathfrak{L} = [\Lambda]$.

Satz 1. E_1, E_2, E_3 sind Einheiten, ξ, χ, ψ zu $\mathfrak{L}$ prime Zahlen in $k(\zeta + \zeta^{-1})$. s bezeichnet eine beliebige natürliche Zahl, $s > p$. Die Diophantische Gleichung

$$E_1 \xi^p + E_2 \chi^p + E_3 \Lambda^s \psi^p = 0 \tag{1}$$

ist unmöglich.

Beweis. Durch E_1 dividiert:

$$\xi^p + E_2' \chi^p + E_3' \Lambda^s \psi^p = 0, \tag{2}$$

welche als eine Kongruenz nach ρ angewendet, zeigt, daß E_2' mit einer rationalen Zahl kongruent ist und daher E_2' eine volle p-te Potenz ist (1):

$$E_2' = E''^p$$

und mit der Bezeichnung

$$\eta = E'' \chi$$

wird

$$\xi^p + \eta^p = -E_3' \Lambda^s \psi^p \tag{3}$$

Da bekanntlich die linke Seite der Gleichung (3) in die folgenden $\frac{p+1}{2}$ reelle Faktoren zersetzt werden kann:

$$\xi^p + \eta^p = (\xi + \eta) \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} [(\xi + \eta \zeta^i)(\xi + \eta \zeta^{-i})]$$

und ferner die Faktoren $(\xi + \eta\,\zeta^i)\,(\xi + \eta\,\zeta^{-i})_{(i=1,\,\ldots\,\frac{p-1}{2})}$ in der Form geschrieben werden können:

$$(\xi + \eta\,\zeta^i)\,(\xi + \eta\,\zeta^{-i}) = \xi^2 + \xi\,\eta\,(\zeta^i + \zeta^{-i}) + \eta^2 = (\xi + \eta)^2 - E_i^*\,\xi\,\eta\,\Lambda 1$$
$$(i = 1, \ldots \frac{p-1}{2})$$

wo $E_i^*\ (i = 1, \ldots \frac{p-1}{2})$ Einheiten in $k(\zeta + \zeta^{-1})$ sind, ist aus der Bedingung $s > p > 3$ leicht ersichtlich, daß diese Faktoren nur mit der ersten Potenz von Λ teilbar sind und daher entspringen aus der Gleichung (3) die folgenden $\frac{p+1}{2}$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi + \eta &= \Lambda^{s-\frac{p-1}{2}}\,\mathfrak{j}_0^p\,\mathfrak{d} \\ (\xi + \eta\,\zeta^i)\,(\xi + \eta\,\zeta^{-i}) &= \Lambda\,\mathfrak{j}_i^p\,\mathfrak{d}^2 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots \frac{p-1}{2}) \tag{4}$$

in welchen $\mathfrak{d}$ der größte gemeinsame Idealteiler der Zahlen $[\xi, \eta]$ ist und $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots \mathfrak{j}_{\frac{p-1}{2}}$ gewisse, zu $\mathfrak{L}$ prime Idealen in $k(\zeta + \zeta^{-1})$ sind.

Wenn $p = 5$ ist, ist die Klassenanzahl des Unterkörpers $k(e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}})$ gleich 1, daher ist $\mathfrak{d}_5 \sim 1$, und folglich $\mathfrak{d}_5 = [\delta_5]$, in welchem Falle also δ_5 der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $[\xi, \eta]$ ist. Dividiert mit δ_5, erhalten wir für $p = 5$ die folgenden 3 Gleichungen aus der Schar (4):

$$\left.\begin{aligned} \xi' + \eta' &= \Lambda_5^{s-2}\,\varrho_0^5 \\ (\xi' + \eta'\,e^{\frac{2\pi i}{5}})\,(\xi' + \eta'\,e^{-\frac{2\pi i}{5}}) &= \Lambda_5\,\varrho_1^5 \\ (\xi' + \eta'\,e^{\frac{4\pi i}{5}})\,(\xi' + \eta'\,e^{-\frac{4\pi i}{5}}) &= \Lambda_5\,\varrho_2^5 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo $\mathfrak{j}_i = [\varrho_i] (i = 0, 1, 2)$ sind.

Ist $p > 5$, kann man aus der Gleichungsschar (4) die folgenden $\frac{p-1}{2}$ Gleichungen gewinnen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2}{\xi^2 + \xi\,\eta\,(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}) + \eta^2} &= \Lambda^{2s-p}\left(\frac{\mathfrak{j}_0^2}{\mathfrak{j}_{\frac{p-1}{2}}}\right)^p \\ \frac{\xi^2 + \xi\,\eta\,(\zeta^i + \zeta^{-i}) + \eta^2}{\xi^2 + \xi\,\eta\,(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}) + \eta^2} &= \left(\frac{\mathfrak{j}_i}{\mathfrak{j}_{\frac{p-1}{2}}}\right)^p \qquad (i = 1, \ldots \frac{p-3}{2}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

aus welchen $\mathfrak{d}$ eliminiert ist. Da p eine reguläre Primzahl ist, sind die Ideale $\frac{\mathfrak{j}_0^2}{\mathfrak{j}^{\frac{p-1}{2}}}, \frac{\mathfrak{j}_1}{\mathfrak{j}^{\frac{p-1}{2}}}, \ldots \frac{\mathfrak{j}^{\frac{p-3}{2}}}{\mathfrak{j}^{\frac{p-1}{2}}}$ Hauptideale und können daher durch Zahlen des Körpers $k(\zeta + \zeta^{-1})$ ersetzt werden. Die ersten drei Gleichungen der Gleichungsschar (6) lauten folglich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2}{\xi^2 + \xi\eta(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}) + \eta^2} &= \varepsilon_0 \cdot 1^{2s-p} \left(\frac{\varrho_0^{2p}}{\varrho^p_{\frac{p-1}{2}}}\right) \\ \frac{\xi^2 + \xi\eta(\zeta + \zeta^{-1}) + \eta^2}{\xi^2 + \xi\eta(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}) + \eta^2} &= \varepsilon_1 \frac{\varrho_1^p}{\varrho^p_{\frac{p-1}{2}}} \\ \frac{\xi^2 + \xi\eta(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + \eta^2}{\xi^2 + \xi\eta(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}) + \eta^2} &= \varepsilon_2 \frac{\varrho_2^p}{\varrho^p_{\frac{p-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Es stehen also laut den Gleichungen (5), bzw. (7) sowohl im Falle $p = 5$, wie auch im Falle $p > 5$ wenigstens drei voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung, aus welchen, die Zahlen ξ, η, bzw. $\xi, \eta, \varrho_{\frac{p-1}{2}}$ eliminierend, mit der Bezeichnung $\varrho_0^2 = \varrho$, sich die folgende Gleichung ergibt:

$$\varepsilon_1' \varrho_1^p + \varepsilon_2 \varrho_2^p + \varepsilon_0' \Lambda^{s'} \varrho^p = 0 \quad (8)$$

dabei sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0' &= \varepsilon_0(\zeta + 1 + \zeta^{-1}) \\ \varepsilon_1' &= -\varepsilon_1(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}})^2 \\ s' &= 2s - p > p. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Gleichung (8) hat dieselbe Form, wie die Gleichung (1) und mit Rücksicht auf die Ungleichheit (9), können Einheiten ε_1', ε_2 mit der oben angewandten Methode wieder entfernt werden. Die Zahlen ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 sind numerische Faktoren der Zahl ψ und dementsprechend sind ihre Normen kleiner als $N(\psi)$. Die Fortsetzung führt also entweder zu einem Widerspruch oder zu einer Gleichung:

$$\omega_1^p + \omega_2^p + e_0 \Lambda^t \omega_0^p = 0 \quad (10)$$

in welcher e_0, ω_0, ω_1, ω_2 alle Einheiten des Körpers $k(\zeta)$ sind. Setzt man

$$\lambda = 1 - \zeta, \quad \mathfrak{l} = [\lambda]$$

und wendet man die descente infinite von Kummer auf die Gleichung (10) an, so ergibt sich die Gleichung:

$$\omega_1'^p + \omega_2'^p + e_0' \lambda^{2t-p} \omega_0'^p = 0$$

Wiederholt man den Abstieg k-mal, so wird endlich das Exponent von λ:

$$t^{(k)} = 2t - kp \tag{11}$$

Andererseits kann in der Gleichung (10) die Einheit ω_1 stets mit einer Einheit multipliziert werden, so daß in der Kongruenz

$$\gamma \omega_1 = \vartheta_1 \equiv U \pmod{\mathfrak{l}^p}$$

u eine rationale ganze Zahl und γ eine Einheit in $k(\zeta)$ ist[2]. Gleichzeitig wird

$$\gamma \omega_2 = \vartheta \equiv -U \pmod{\mathfrak{l}^p}$$

und laut[1] sind also die Einheiten ϑ_1, ϑ_2 volle p-te Potenzen. Bezeichnet man

$$\gamma \omega_0 = \vartheta_0$$

so kann die Gleichung (10) auf die Form

$$\vartheta_1^p + \vartheta_2^p = e_0'' \lambda^{2t} \vartheta_0^p$$

gebracht werden, welche in ihre Faktoren zerlegt, als ersten Faktor hat:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \beta_0 \lambda^{2t-p+1} \delta_0^p$$

Mit Rücksicht auf die obige Bemerkung ist:

$$\delta_1^p + \delta_2^p = \beta_0 \lambda^{2t-p+1} \delta_0^p$$

wo β_0, δ_0, δ_1, δ_2 Einheiten des Körpers $k(\zeta)$ sind. Wiederholt man dieses Verfahren m-mal, so wird das Exponent von λ:

$$t^{(m)} = 2t - m(p-1) \tag{12}$$

Ist die Zahl t genug groß, so kann man durch Kombinieren obiger Verfahren laut den Gleichungen (11) und (12) stets erreichen, daß sich zuletzt ein Wert

$$T = 2t - kp - m(p-1) = p \tag{13}$$

ergibt, was aber offensichtlich unmöglich ist, da die Einheiten ω_1, ω_2 stets semiprimär gemacht werden können:

$$\omega_1 \equiv a \pmod{\mathfrak{l}^2}$$
$$\omega_2 \equiv -a \pmod{\mathfrak{l}^2}$$

wo a eine rationale ganze Zahl ist, und daher in einer Gleichung

$$\omega_1^p + \omega_2^p = -e_0 \lambda^T \omega_0^p$$

T nur den Wert $T = p+1$ aufweisen kann, nicht aber $T = p$.

Eine Lösung her Gleichung (13) ist z. B.:

$$k = 2t - w(p-1) - 1$$
$$m = wp - 2t$$

wo w eine solche ganze Zahl sein muß, daß sich die Zahlen t, k, m als positive ganze Zahlen ergeben. Aus dieser Bedingung folgt

$$\frac{2t-1}{p-1} > w > \frac{2t}{p}; \tag{14}$$

die Zahl t muß also durch die Anwendung der Operationsreihe (9) auf die Weise gewählt werden, daß (14) für w eine ganzzahlige Lösung habe. Dies ist immer möglich laut Bedingung:

$$\frac{2t-1}{p-1} - \frac{2t}{p} > 2$$

woraus sich die einfache Forderung ergibt:

$$t > p^2 - \frac{p}{2}.$$

Satz 2. Wenn ε_1, ε_2, ε_3 Einheiten, ξ, χ, ψ zu $\mathfrak{l}$ prime Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sind und $s = 2p$, $s = 2p-1$ oder $s = 2p-2$, so ist die Diophantische Gleichung

$$\varepsilon_1 \xi^p + \varepsilon_2 \chi^p + \varepsilon_3 \lambda^s \psi^p = 0 \tag{15}$$

unmöglich.

Beweis. Nach dem ersten Schritte des Kummer'schen Abstieges entsteht die Gleichung

$$\tau_1^p + \vartheta_2 \tau_2^p + \vartheta_0 \lambda^{s'} \tau_0^p = 0 \tag{16}$$

in welcher ϑ_0, ϑ_2 Einheiten, τ_0, τ_1, τ_2 Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ sind und

$$s' = p, \text{ bzw. } s' = p-1, \text{ bzw. } s' = p-2.$$

Die ersten zwei Fälle sind offensichtlich unmöglich, da die Varianten durch Multiplikation von einer Einheit semiprimär gemacht werden können und dementsprechend, wenn $s' \geqq p-1$ ist, muß wenigstens $s' \geqq p+1$ sein.

Wenn $s' = p-2$, und wenn eine Einheit die Kongruenz:

$$\vartheta_2 \equiv U \qquad (\text{mod } \mathfrak{l}^{p-2})$$

erfüllt, dann ist ϑ_2 eine reelle Einheit und muß also auch die Kongruenz

$$\vartheta_2 \equiv U \pmod{l^{p-1}}$$

erfüllen, ϑ_2 also eine volle p-te Potenz ist und wir haben den Fall $s' = p-1$, von welchem soeben bewiesen wurde, daß er unmöglich ist.

Satz 3. $p > 3$ bezeichnet eine reguläre Primzahl, m und n sind positive ganze Zahlen. Die Gleichung

$$x^{pn} + y^{pn} = p^m z^{pn} \tag{17}$$

kann nicht mit rationalen ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x, y, z gelöst werden.

Beweis. Die Gleichung (17) kann umgestaltet werden:

$$X^p + Y^p = p^m Z^p. \tag{18}$$

Ist $m = 0$, repräsentiert (18) den ersten Fall des letzten Fermat'schen Satzes, was für reguläre Primexponenten Kummer bewiesen hat.

Für $m = 1$ folgt der Beweis aus dem Satze 2, oder laut Westlund[4].

Der Fall $m = 2$ ist im Satz 2 bewiesen.

Schließlich folgt für $m > 2$ der Beweis aus dem Satze 1.

Satz 4. Ist $p = 3$ und $m \not\equiv 2 \pmod 3$, so hat die Gleichung (18) keine ganzzahlige Lösung. Ist aber $m \equiv 2 \pmod 3$, so gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

Beweis. Ist $m \equiv 0 \pmod 3$, dann ist die Gleichung (18) zur Fermatschen Gleichung mit Exponent 3 zurückgeführt, was unlösbar ist.

Für $m \equiv 1 \pmod 3$ hat Landau[5] die Unlösbarkeit bewiesen.

Ist $m \equiv 2 \pmod 3$, so bekommt die Gleichung (18) die Form:

$$x^3 + y^3 = 9 z^3, \tag{19}$$

in welcher z durch 3 teilbar sein kann. Aus (19) sind

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 a^3 \\ x^2 - x y + y^2 &= 3 b^3 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

oder mit der Bezeichnung $\zeta' = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, kann letztere in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x + y\zeta' &= (1-\zeta')(u + v\zeta')^3 \\ x + y\zeta'^2 &= (1-\zeta'^2)(u + v\zeta'^2)^3 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

gespalten werden und da

$$(u + v\zeta')^3 = (u^3 - 3 u v^2 + v^3) + (3 u^2 v - 3 u v^2)\zeta'$$

ist, wird aus (20), (21):

$$a^3 = 3 u v (u - v) \tag{22}$$

wo u und v relative Prim sind. Aus der Gleichung (22) folgt also eine Gleichung

$$d^3 + f^3 = 9\, c^3$$

wo c, d, f ganze rationale Zahlen und kleiner als x, y, z sind. Dieser Abstieg hat jedoch unendlich viele Lösungen, da es eine gibt: $d = 2$, $f = 1$, $c = 1$.

Sind d und f relative prim, so sind auch x und y relative Primzahlen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} x &= d^9 - 3\, d^6 f^3 - 6\, d^3 f^6 - f^9 \\ y &= -d^9 - 6\, d^6 f^3 - 3\, d^3 f^6 + f^9 \\ x + y &= -9\, d^3 f^3 (d^3 + f^3). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Untersucht man die Reste nach Moduln d^3, f^3 und $(d^3 + f^3)$, so ergibt sich f^9, d^9, bzw. f^9; y und $(x + y)$ sind also einander prim und folglich auch x und y.

Die aus den Gleichungen (23) entspringende Serie enthält also unabhängige Gruppen und es gibt unendlich viele unabhängige Lösungen. Die zweite Gruppe ist: $x = 271$, $y = -919$, $z = -438$.

Andererseits gibt es außer den Gliedern dieser Serie keine andere ganzzahlige Lösung der Gleichung (19). Sollte nämlich x', y', z' eine Lösung sein, welche nicht zu der oben definierten Serie gehört, so müssen laut der Gleichung (22) auch kleinere Zahlen x'', y'', z'' die Gleichung (19) befriedigen, welche ebenfalls nicht zu der erwähnten Serie gehören können. Dieser Abstieg führt jedoch zu einem Widerspruch, da es außer der Basis 2, 1, 1 keine andere elementare Lösung der Gleichung (19) gibt.

Bemerkung. Sehr wahrscheinlich hat die Diophantische Gleichung

$$x^t + y^t = t^m z^t$$

wenn $t > 3$, keine ganzzahlige nicht verschwindende Lösung.

Unter den nicht primen Werten von t kann diese Vermutung für den Fall $t = 2^v$, $v > 1$, leicht bestätigt werden, da die Gleichung

$$x^{2^v} + y^{2^v} = 2^{mv} z^{2^v} \qquad v > 1$$

auf die Form zurückgeführt werden kann:

$$X^4 + Y^4 = Z^2$$

von welcher Hilbert[3] und früher Euler bewiesen hat, daß sie in ganzen nicht verschwindenden Zahlen unlösbar ist.

Zitate:

1. *E. Kummer:* Journ. f. Math., Bd. 40, 1850. S. 128—129.

2. *E. Kummer:* Journ. f. Math., Bd. 44, 1851. S. 138—141.

3. *D. Hilbert:* Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897. S. 523.

4. *J. Westlund:* Amer. Math. Monthly, 16, 1909, 3—4.

5. *E. Landau:* Aus der algebraischen Zahlentheorie, Bd. III. S. 214.

Lösbarkeit einer speziellen Differentialgleichung mit einem Parameter und Transcendenz von Zahlen.

Von
Hans Hornich, Graz.

(Eingelangt am 19. Januar 1950.)

Im folgenden soll eine einfache Differentialgleichung (D. G.) angegeben werden, bei der die Existenz einer Lösung, bzw. der Bereich ihrer Regularität von der Transcendenz einer Zahl abhängt, die als Parameter in der D.G. enthalten ist[1].

Wir bezeichnen die Funktion $f(x, y)$ als regulär im Kreis $x^2 + y^2 < \varrho^2$, wenn sie dort nach homogenen Termen in x, y sich entwickeln läßt:

$$f(x, y) = c_0 + (c_1 x + c_2 y) + \ldots$$

oder in Polarkoordinaten ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \geqq 0$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{\substack{\nu = n, n-2, n-4, \ldots \\ \nu \geqq 0}} (A_{n\nu} \cos \nu \varphi + B_{n\nu} \sin \nu \varphi).$$

Wir betrachten die D.G.

$$L(u) \equiv a^2 \left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f,$$

wo $0 < a < 1$ eine Konstante ist und

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} (\cos \varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos (2n+1)\varphi) =$$

$$= \frac{1}{1 - r^2} \sum_{\nu = 1, 3, 5 \ldots} r^\nu \cos \nu \varphi$$

für $r < 1$ konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt.

---

[1] Vgl. die Arbeit von D. G. Bourgin u. R. Duffin, Bull. of the Amer. Math. Soc. 45 (1939) p. 851–858, wo die Art der Lösung, bzw. Eindeutigkeit eines Dirichletschen Problems einer (hyperbolischen) D. G. für ein Rechteck von der Irrationalität des Verhältnisses der Rechteckseiten abhängt.

Setzt man die Lösung u als reguläre Funktion an:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{\substack{\nu=n,\, n-2,\, n-4,\ldots \\ \nu \geqq 0}} (\alpha_{n\nu} \cos \nu\varphi + \beta_{n\nu} \sin \nu\varphi),$$

so wird

$$L(u) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{\substack{\nu=n,\, n-2,\ldots \\ \nu \geqq 0}} (a^2 n^2 - \nu^2)(\alpha_{n\nu} \cos \nu\varphi + \beta_{n\nu} \sin \nu\varphi)$$

und es muß wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung sein:

$$\begin{aligned} \alpha_{n\nu}(a^2 n^2 - \nu^2) &= 1 \text{ für } n \text{ und } \nu \text{ ungerade} \\ &= 0 \text{ für } n \text{ und } \nu \text{ gerade} \\ \beta_{n\nu}(a^2 n^2 - \nu^2) &= 0 \text{ für alle } n \text{ und } \nu. \end{aligned}$$

Wir haben nun zu unterscheiden:

Zunächst den trivialen Fall eines rationalen $a = \frac{p}{q}$ $(0 < p < q$ ganz und $(p, q) = 1)$. Sind p und q ungerad, so haben wir für $n = q$, $\nu = p$ einen Widerspruch in den obigen Gleichungen und die D.G. ist nicht regulär lösbar. Ist p gerade, q ungerade oder umgekehrt, so verschwindet $a^2 n^2 - \nu^2 = \frac{p^2 n^2 - q^2 \nu^2}{q^2}$ nur für $n = k\,q$, $\nu = k\,p$ mit ganzem $k > 0$. Für gerade k ist also $\alpha_{kq,\, kp}$ und $\beta_{kq,\, kp}$ willkürlich. (Ein ungerades k kommt ja wegen $n - \nu = k\,(q - p)$ ungerade nicht in Frage.) Für alle andern n und ν ist $\alpha_{n\nu}$, $\beta_{n\nu}$ eindeutig bestimmt, und zwar $\beta_{n\nu} = 0$ und $\alpha_{n\nu} = 0$ für n, ν gerade und $\alpha_{n\nu} = \frac{1}{a^2 n^2 - \nu^2} = \frac{q^2}{p^2 n^2 - q^2 \nu^2}$ für n, ν ungerade, also $|\alpha_{n\nu}| \leqq q^2$, so daß die Konvergenz und Regularität der Reihe dieser Glieder für $r < 1$ gewährleistet ist.

Ist p und q ungerade, so ist also die D.G. nicht regulär lösbar. Ist eine der Zahlen p und q gerade, so hat die D.G. unendlichviele reguläre Lösungen, und zwar unterscheiden sich diese durch Glieder der Art $\alpha_{kq,\, k\,p} \cdot r^{kq} \cos k\,p\,\varphi$ und $\beta_{kq,\, kp}\, r^{kq} \sin k\,p\,\varphi$ mit geradem k.

Ist a irrational, so können alle $\alpha_{n\nu}$, $\beta_{n\nu}$ eindeutig berechnet werden bis auf das stets willkürlich wählbare α_{00} (es ist natürlich stets $\beta_{n\,\nu} = 0$). Bezüglich der Existenz und Regularität der Lösung gilt aber:

A. *Ist für alle Paare ungerader Zahlen n, ν mit $0 < \nu < n$*

$$\underline{\lim}\ \sqrt[n]{\left| a - \frac{\nu}{n} \right|} = R > 0,$$

so existiert eine (und bis auf die Wahl von a_{00} nur eine) für $r < R$ reguläre Lösung unserer D.G.

Insbesonders fällt jede algebraische Zahl a vom Grade $k > 1$ darunter: denn es gibt dann für eine solche Zahl ein c mit $0 < c < 1$, so daß stets $|a - \frac{v}{n}| > \frac{c}{n^k}$ gilt; wegen $n^k < (e^k)^n$ ist dann ja auch

$$|a - \frac{v}{n}| > \left(\frac{c}{e^k}\right)^n.$$

Nach Voraussetzung ist für jedes ε mit $0 < \varepsilon < R$ bei fast allen Zahlenpaaren v und n

$$|a^2 n^2 - v^2| = n^2 (a + \frac{v}{n}) |a - \frac{v}{n}| > n^2 a (R - \varepsilon)^n, \text{ also}$$

$$|a_{nv}| < \frac{1}{n^2 a (R - \varepsilon)^n}.$$

Daraus folgt sofort Konvergenz und Regularität der Lösung

$$u = \Sigma r^n \Sigma a_{nv} \cos v\varphi$$

für $r < R$.

B. *Ist hingegen für alle ungeraden Zahlen n, v mit $0 < v < n$*

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{|a - \frac{v}{n}|} = 0,$$

so gibt es keine in einer Umgebung des Nullpunkts reguläre Lösung.

Sei also (n_l, v_l) eine Folge von Paaren ungerader Zahlen $0 < v_l < n_l$ und

$$|a - \frac{v_l}{n_l}| = \varepsilon_l^{n_l} \text{ mit } \varepsilon_l \to 0 \text{ und } \varepsilon_l > 0.$$

Dann ist

$$|a^2 {n_l}^2 - {v_l}^2| < 2 {n_l}^2 \varepsilon_l^{n_l}$$

Für $\varphi = 0$ ist dann

$$|a_{n_l v_l} r^{n_l} \cos v_l \varphi| \geqq \frac{r^{n_l}}{2 n_l^2 \varepsilon_l^{n_l}}$$

strebt also für $r > 0$ bei $l \to \infty$ gegen $+\infty$.

Für alle andern Glieder mit r^{n_l} und $v \neq v_l$ ist aber für fast alle l

$$\left| a - \frac{v}{n_l} \right| > \tfrac{1}{2} \frac{1}{n_l}$$

und für $\varphi = 0$ wieder

$$\left| \alpha_{n\ v} r^{n_l} \cos v\varphi \right| \leqq \frac{r^{n_l}}{n_l^2 \cdot a \dfrac{1}{2 n_l}}$$

die Summe über alle $v \neq v_l$ von $v = 1$ bis n_l ist also absolut $< \dfrac{2 r^{n_l}}{a}$

und es strebt für $\varphi = 0$ und $0 < r < 1$

$$\left| \sum_v \alpha_{n_l\, v} r^{n_l} \cos v\varphi \right| \longrightarrow + \infty \quad \text{für } l \longrightarrow + \infty .$$

Die in B. charakterisierten Zahlen a sind Liouvillesche Zahlen (also transcendent)[2]; sie liegen im Intervall (0, 1) dicht und ihre Menge ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Seien $a_1 \ldots a_k$ k verschiedene Zahlen des Falles (A) *und $u_1 \ldots u_k$ die zugehörigen für $r = 0$ verschwindenden Lösungen unserer D.G., so sind die $u_1 \ldots u_k$ linear unabhängig.*

Es sei $u_i = \sum r^n \sum \alpha_{nv}^{(i)} \cos v\varphi$. Wäre nun $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \equiv 0$, so folgt aus

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(u_i) = f \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \text{ also}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[a_i^2 \left(r^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} \right] = f \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

für jedes ungerade n und v

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i^2 n^2 \alpha_{nv}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

Wegen $\alpha_{nv}^{(i)} = \dfrac{1}{a_i^2 n^2 - v^2}$ folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{a_i^2 n^2 - v^2} = 0$$

oder

[2] Wenn nämlich für jedes $1 > \varepsilon > 0$ ein Paar natürlicher Zahlen r, n existiert mit $\left| a - \frac{v}{n} \right| < \varepsilon^n$, so ist wegen $\varepsilon^n < n^{\lg \varepsilon}$ die Zahl a Liouvillesch (vgl. etwa Perron, (1939) Irrationalzahlen, S. 176).

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \prod_{j \neq i} (a_j^2 n^2 - v^2) = 0.$$

Soll dieses Polynom in n, v für alle ganzen ungeraden $0 < v \leqq n$ verschwinden, so müssen die Koeffizienten von $v^{2(k-1)}$, $v^{2(k-2)}$, $\ldots$ v^0 verschwinden:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j \neq i} a_j^2 = 0$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \prod_{j \neq i} a_j^2 = 0,$$

woraus wegen der Verschiedenheit aller a_j für alle i $\alpha_i = 0$ folgt.

Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen.[1]

Von

Mauro Picone und **Gaetano Fichera**, Rom.

(Eingelangt am 23. Januar 1950.)

Seitdem ich im Jahre 1930 die Leitung des Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo übernommen habe, habe ich mehrmals in meinen Veröffentlichungen darauf hingewiesen, daß die quantitative und Existenzanalysis der gewöhnlichen wie auch partiellen Differentialgleichungen, welche in den experimentellen Wissenschaften und in der Technik vorkommen, auf Grund ihrer Transformation in Integralgleichungen erster statt zweiter Art anzugreifen ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, verweise ich den Leser auf meine letzten Artikel: „Sulla trasformazione in equazioni integrali lineari di prima specie dei problemi al contorno..."[2].

Die fruchtbare Tätigkeit meiner Mitarbeiter im Ist. Naz. per le Appl. del Calcolo hat diesen Anschauungen die glänzendste Bestätigung erbracht, die ich erwarten konnte, wobei sich besonders die Herren *Luigi Amerio*, *Aldo Ghizzetti* und *Gaetano Fichera* hervorgetan haben[3]. Dem letztgenannten ist es durch eine geniale Synthesis und auch auf Grund der durch die erstgenannten erhaltenen Resultate gelungen, in bedeutenden Spezialfällen vollständige Funktionensysteme aufzufinden, welche mit Hilfe meiner Methoden es erlauben, nicht nur die Konvergenz des Verfahrens, sondern auch die Existenz der Lösung in diesen Fällen zu beweisen. Dadurch halte ich meine Überzeugung, nach welcher die Fortsetzung der Forschungen in der in den obengenannten Artikeln

---

[1] Diese Arbeit wurde im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (Rom) abgefaßt und am II. Österreichischen Mathematiker-Kongreß (Innsbruck, 29. VIII./2. IX. 1949) vorgetragen.

[2] S. *M. Picone* (3), S. Literatur am Ende des Artikels.

[3] S. *L. Amerio* (1), (2), (3), (4), *A. Ghizzetti* (1), (2), (3), *G. Fichera* (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9).

hingewiesenen Richtung es erlauben würde, eine neue Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zu gründen, deren Resultate vom theoretischen und praktischen Standpunkt als besonders fruchtbar sich zeigen könnten, als stark begründet.

Als ich die Einladung, einen Vortrag am II. Kongreß der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft zu halten, erhielt, gelangte ich zur Überzeugung, daß es das Beste wäre, was ich tun könnte, meine obengenannten Ansichten synthetisch darzustellen. Diesen Entschluß gefaßt, war es mein Wunsch, die Abfassung des Vortrages meinem vortrefflichen Assistenten an der römischen Universität und Mitarbeiter im Ist. Naz. per le Appl. del Cal. Herrn *Gaetano Fichera* zu überlassen.

Herrn *Fichera* ist die Abfassung des § 2 dieses Artikels zu verdanken, wo die Methode zur Lösung der allgemeinsten linearen Gleichungen in einem abstrakten Raume, in welchem ein Reziprozitätssatz, der dem Green'schen für Differentialgleichungen analog ist, gilt, behandelt wird. Das Gleiche gilt für § 5 und 6, wo derselbe die Methode auf gewisse Integro-Differentialgleichungen vom *Volterra*'schen Typus[4] und auf einige Randwertprobleme für *Cartan*'sche Differentialformen überträgt[5]. Ich glaube, daß auch § 7 vom besonderen Interesse ist, in welchem es Herrn *Fichera* gelungen ist, hinreichende Bedingungen für die Konvergenz meiner Lösungsmethode aufzustellen für den Fall, daß die linearen Gleichungen eine Reziprozitätsformel zulassen, und aus dieser Konvergenz den Existenzbeweis wie auch ein numerisches Lösungsverfahren abzuleiten. Dem Leser zuwillen schließt der Artikel mit einer Anwendung der Methode auf das klassische *Dirichlet*'sche Problem für die *Laplace*'sche Gleichung, das somit eine vollständige und auch im Vergleich mit den modernsten besonders einfache Behandlung erhält[6].

Mauro Picone.

1. Voraussetzungen.

Es sei S ein, in Bezug auf den komplexen Körper, linearer abstrakter Raum[7]. Es seien also die Summe zweier Elemente und das Produkt eines Elementes mit einer komplexen Zahl mit folgenden Eigenschaften definiert:

[4] S. *V. Volterra* (1).
[5] S. *Hodge* (1), (2), (3), *De Rham-Bidal* (1).
[6] S. *C. Miranda* (1).
[7] S. *M. Picone* (4) S. 267.

I. Die Resultate der obengenannten Operationen sind Elemente aus S.

II. Wenn u, v, w, Elemente aus S sind, gilt:

$$u + v = v + u,$$
$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

III. Wenn u, v Elemente aus S und a, b komplexe Zahlen sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} a\,(u + v) &= a\,u + a\,v, \\ (a + b)\,u &= a\,u + b\,u, \\ a\,(b\,u) &= (a\,b)\,u, \\ 1\,.\,u &= u. \end{aligned}$$

IV. In S existiert ein Element ω (der Ursprung von S), so daß man für jedes u

$$u + \omega = u$$

hat.

Aus

$$u + 0\,u = (1 + 0)\,u = 1\,.\,u = u$$

hat man für jedes u

$$0\,.\,u = \omega$$

Das Element $(-1)\,u$ heißt das entgegengesetzte von u und wird mit $-u$ bezeichnet.

Wir nehmen außerdem an, daß zwischen den Elementen aus S eine involutorische Korrespondenz definiert ist; die sich entsprechenden Elemente nennen wir u und $\bar{u}$ (wir nennen $\bar{u}$ das zu u konjugierte Element und umgekehrt) mit folgenden Eigenschaften:

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{a\,u} = \bar{a}\,\bar{u}$$

Im Raume S sei für jedes Elementenpaar u, v ein komplexes Funktional $F(u, v)$, das folgenden Eigenschaften genügt, definiert:

1. $$F(u, v) = F(v, u),$$

2. $$F(u, a\,v_1 + b\,v_2) = a\,F(u, v_1) + b\,F(u, v_2),$$

also aus 1. $F(a\,u_1 + b\,u_2, v) = a\,F(u_1, v) + b\,F(u_2, v)$

3. $$F(\bar{u}, \bar{v}) = \overline{F(u, v)}$$

4. $F(u, \bar{u})$ ist reell positiv, wenn $u \neq \omega$.

Wir normieren den Raum S, indem wir $\| u \|$ als Norm eines Elementes aus S mit

$$\| u \| = | F(u, \bar{u}) |^{\frac{1}{2}}$$

definieren.

Da die Schwarz'sche Ungleichung gilt:

$$| F(u, \bar{v}) |^2 \leqq F(u, \bar{u}) \cdot F(v, \bar{v}),$$

so läßt sich leicht beweisen, daß:

$$\| u + v \| \leqq \| u \| + \| v \|.$$

In dem so normierten Raume S läßt sich eine Theorie der linearen Approximation entwickeln, welche ganz analog der gewöhnlich im Hilbertschen Raum entwickelten verläuft[8]. Wenn man annimmt, daß der Raum S vollständig ist, so gelten alle Resultate mit denselben Beweisen wie im Hilbertschen Raum. Z. B. wenn ein orthonormiertes Punktsystem, das heißt ein solches, für welches

$$F(v_i, \bar{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

gilt, so haben wir die Besselsche Ungleichung:

$$\Sigma_i \{ | F(u, \bar{v}_i) | \}^2 \leqq F(u, \bar{u}) \tag{1}$$

und das Parsevalsche Theorem:

I. *Notwendige und hinreichende Bedingung, daß in* (1) *das Gleichheitszeichen gilt, ist, daß das System* $\{v_i\}$ *vollständig ist.*

Außerdem hat man

II. *Wenn für einen Punkt* u *aus* S *seine Fourierkoordinaten* c_i *in Bezug auf das vollständige System* $\{v_j\}$, *d. h.*

$$c_i = F(u, \bar{v}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

bekannt sind, und wenn man

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} v_k$$

setzt und die $\gamma_k^{(n)}$ *aus dem sich als lösbar herausstellenden Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} F(v_k, \bar{v}_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt, dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \| = 0$$

Man hat auch:

---

[8] S. *M. Picone* (1) S. 507, (5) S. 102.

III. *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des Systems* $\{v_i\}$ *ist, daß der Ursprung* ω *die einzige Lösung des unendlichen Gleichungssystems*

$$F(u, \bar{v}_i) = 0$$

sei, d. h. daß das System $\{v_i\}$ *in* S *abgeschlossen sei.*

2. Allgemeine Lösungsmethoden.

Es seien U, U^*, U_1, U_2 in Bezug auf den komplexen Zahlkörper lineare Räume und L_s (L_s^*) homogene und distributive in U [U^*] mit in den U_s enthaltenen Wertevorräten definierte Funktionen. Es sei F_s ein für jedes Punktepaar aus U_s definiertes komplexes Funktional. Wir nehmen an, daß für jedes Punktepaar u, v aus U und U^* gilt:

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = F_2[L_2[u], L^*_2[v]] \tag{2}$$

Wir nehmen außerdem an, daß die F_1 und F_2 den im vorhergehenden § aufgezählten Eigenschaften genügen.

Es sei u_2 ein Punkt aus U_2 und wir betrachten die Gleichung:

$$L_2[u] = u_2 \tag{3}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $U \subset U_1$ und $L_1 \equiv 1$. Gleichung (2) wird dann:

$$F_1[u, L^*_1[v]] = F_2[u_2, L^*_2[v]]$$

Es gilt folgender Satz:

IV. a) *Wenn ein System* $\{v_i\}$ *von Punkten aus* U^* *existiert, so daß das System* $\{L^*_1[v_i]\}$ *abgeschlossen in* U *in Bezug auf das Funktional* F_1 *ist, dann ist die Lösung der Gleichung* (3) *eindeutig.*

b) *Wenn das System* $\{L^*_1[v_i]\}$ *vollständig in* U *ist und man*

$$w_i = L^*_1[v_i]$$

setzt, dann gilt, angenommen daß das System $\{w_i\}$ *orthonormiert ist, für* (3) *die Lösungsformel*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_i F_2[u_2, L^*_2[v_i]] \tag{4}$$

Man beachte, daß für die Gültigkeit dieses Satzes nicht nötig ist, daß das Funktional F_2 allen vier Eigenschaften genügt, welche für das Funktional F_1 vorausgesetzt sind, sondern daß man es nur für die die Eigenschaft 2. benötigt.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo U auch nicht in U_1 enthalten sein kann. Es werde vorausgesetzt, daß wir dann eine Funktion $G(u_1, u_2)$

mit $u_1 \subset U_1$ und $u_2 \subset U_2$ kennen, deren Wertevorrat in U enthalten ist, und für welche die Identität für jedes u aus U

$$u = G\,[L_1\,[u],\, L_2\,[u]] \tag{5}$$

gilt; G sei außerdem als homogen und distributiv vorausgesetzt. In diesem Fall gilt auch Satz IV, wenn man in ihm U durch U_1 und die Formel (4) durch die folgende

$$u = G\,\{\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Sigma}}\, \overline{w}_i\, F_2\,[u_2,\, L^*_2\,[v_i]],\, u_2\} \tag{4'}$$

ersetzt.

Dadurch wird die Lösung der Gleichung $L_2\,[u] = u_2$ auf folgende zwei Aufgaben zurückgeführt:

1. Die Herleitung zweier Formeln vom Typus (2) und (5).

2. Die Konstruktion eines Systems von Punkten $\{v_i\}$ aus U^*, für welches $\{L^*_1\,[v_i]\}$ vollständig ist.

3. Der Fall eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen.[9]

Die beträchtlichsten Anwendungen findet die in dem vorangehenden § 2 skizzierte Methode im Falle eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen; für diesen Fall ist die Aufgabe 1. unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gelöst, während die Aufgabe 2. nur in einigen wichtigen Spezialfällen schon ihre Lösung gefunden hat.

Es sei D ein reguläres Gebiet im euklidischen r-dimensionalen Raume, dessen Grenze wir mit FD bezeichnen, und mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ die reellen Koordinaten seines allgemeinen Punktes P. Es sei:

$$E_{hk} = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_r \\ i_1 + \ldots + i_r \leqq 1+n}} a^{hk}_{i_1 \ldots i_r}\, \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_r}}{\partial\, x_1^{i_1}\, \partial\, x_2^{i_2} \ldots \partial\, x_r^{i_r}}$$

ein Differentialoperator von der Ordnung $\leqq 1 + n$ mit reellen oder komplexen von P abhängigen Koeffizienten, welche außerdem mit ihren Ableitungen

$$\frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_r}\, a^{hk}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial\, x_1^{j_1}\, \partial\, x_2^{j_2} \ldots \partial\, x_r^{j_r}} \qquad (j_1 \leqq i_1, \ldots, j_r \leqq i_r)$$

als stetig in D vorausgesetzt sind. Wir bezeichnen mit

$$E^*_{hk} = \sum_{\substack{i_1 \ldots i_r \\ i_1 + \ldots + i_r \leqq 1+n}} (-1)^{i_1 + \ldots + i_r}\, \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_r}\, a^{hk}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial\, x_1^{i_1}\, \partial\, x_2^{i_2} \ldots \partial\, x_r^{i_r}}$$

[9] S. *M. Picone* (3).

den zu E_{hk} adjungierten Operator und setzen

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} \dots E_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ E_{p1} \dots E_{pp} \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} E^*_{11} \dots E^*_{p1} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ E^*_{1p} \dots E^*_{pp} \end{pmatrix}$$

und nennen E^* die zu E adjungierte Matrix; für den Fall $E \equiv E^*$ nennen wir sie selbstadjungiert. Wenn wir mit einem Buchstaben einen Vektor mit p Komponenten bezeichnen, so werden wir mit demselben Buchstaben und dem Index i ($i = 1, 2, \dots, p$) seine i-te Komponente bezeichnen.

Φ, Φ^* seien lineare Räume der p-dimensionalen Vektoren φ, φ^*, deren Komponenten stetig mit ihren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung in D sind, und deren Ableitungen von der Ordnung $1 + n$ stetig in $D - FD$ sind, und für welche die Funktionen:

$$E_h[\varphi] = \sum_{k=1}^{p} E_{hk}[\varphi_k], \quad E^*_h[\varphi^*] = \sum_{k=1}^{p} E^*_{hk}[\varphi^*_k]$$

summierbar in D sind.

Wir bezeichnen $\binom{n+r}{r} - 1 = n_r$ und setzen für die Ableitungen eines Vektors φ aus Φ

$$\varphi \equiv \varphi^{(0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \equiv \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \equiv \varphi^{(2)}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_r^n} \equiv \varphi^{(n_r)}.$$

Analoge Bezeichnungen führen wir für die Vektoren φ^* aus Φ^* ein.

Es gilt dann folgende Formel von Green-Betti:

$$\int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*] - \varphi^* \times E[\varphi]\}\, dT = \int_{FD} \sum_{k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n} b^{ij}_{hk} \varphi^{(i)}_h \varphi^{*(j)}\, d\sigma, \qquad (6)$$

wo die b^{ij}_{hk} bestimmte in FD fast stetige und beschränkte Funktionen, welche von den Koeffizienten der Operatoren E_{hk} abhängen, sind.

Wir setzen

$$u = \varphi, \quad v = \varphi^*,$$
$$U = \Phi, \quad U^* = \Phi^*;$$

U_1 ist der Raum, der in D summierbaren p-dimensionalen Vektoren; U_2 ist der Raum, der $p\,(2 + n_r)$-dimensionalen Vektoren, deren erste p Komponenten in D definiert und summierbar sind, während die restlichen auf FD definiert und stetig sind;

$$L_1 \equiv 1, \quad L^*_1 \equiv E^*$$

L_2 ist der Operator, welcher darin besteht, daß man jedem Punkte $u \equiv \varphi$ aus U den $p(2 + n_r)$-dimensionalen Vektor zuordnet, dessen Komponenten aus denen des Vektors $E[\varphi]$ in D und aus den $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}, \ldots \varphi^{(n_r)}$ auf FD besteht;

L^*_2 ist der Operator, welcher dem Punkte φ^* den Vektor, dessen Komponenten aus denen von φ^* in D und aus $\varphi^{*(0)}, \ldots, \varphi^{(n_r)}$ auf FD bestehen, zuordnet.

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*]\}\, dT,$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E[\varphi]\}\, dT + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}\, \varphi^{(i)}_k\, \varphi^{*(j)}_h\, d\sigma.$$

Wie man sieht, fällt auf diese Weise die Gleichung (6) mit der Gleichung (2) zusammen.

Gleichung (3) besteht jetzt darin, daß man den Ableitungen der ersten n-Ordnungen des unbekannten Vektors auf FD gewisse Randwerte vorschreibt, und daß man in $D—FD: E[\varphi] = f$ verlangt. Satz IV verwandelt sich für diesen Spezialfall in folgenden Satz:

IV'. a) *Wenn ein System $\{\varphi^*_i\}$ von Vektoren aus Φ^* existiert, so daß das System $\{E^*[\varphi^*_i]\}$ in Φ abgeschlossen ist, dann fallen zwei Lösungen der Gleichung $E[\varphi] = f$, deren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung auf FD die gleichen Randwerte annehmen, auch in ganz D zusammen.*

b) *Es sei ein System $\{\varphi^*_i\}$ von Vektoren aus Φ^* bekannt, für welches das Vektorensystem $\{E^*[\varphi^*_i]\}$ in D hilbertisch vollständig ist: dann bestimmen die Randwerte der Ableitungen der ersten n Ordnungen zusammen mit $E[\varphi] = f$ die Lösung in ganz D, und erlauben ihre effektive Berechnung.*

Gleichung (4) läßt sich auf folgende Art hinschreiben:

$$\varphi_l(P) = \sum_{s=1}^{\infty} w_{sl}(P) \left[\int_D [f(P') \times \varphi^*_s(P')]\, d_{P'}\, T + \right.$$
$$\left. + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}(P')\, \varphi^{(i)}_k(P')\, \varphi^{*(j)}_{sh}(P')\, d_{P'}\, \sigma \right] \qquad (4')$$

Man nehme an, es sei ein Punkt P im Innern von D so festgesetzt, daß die Reihen

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^*_s(P')$$

in D im Mittel konvergieren und daß, wenn man

$$g_{lk}(P, P') = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^*_{sk}(P') \qquad (l, k = 1, \ldots, p)$$

setzt, die Reihen

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^{*(j)}_{sk}(P') \qquad (l, k = 1, \ldots, p;\ j = 0, \ldots, n_r)$$

auf FD im Mittel konvergieren, und daß

$$g^{(j)}_{lk}(P, P') = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{w}_{sl}(P)\, \varphi^{*(j)}_{sk}(P')$$

fast überall gilt. Dann gibt Gleichung (4′)

$$\varphi_l(P) = \int_D [G_l(P, P') \times f(P')]\, d_{P'}\, T + \\ + \int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}(P')\, g^{(j)}_{lh}(P, P')\, \varphi^{(i)}_k(P')\, d_{P'}\, \sigma \qquad (7)$$

Eine Matrix, für welche — wie für $\| g_{lk}(P, P') \|$ — (7) gilt, nennen wir die zur Gleichung $E[\varphi] = f$ gehörige Fundamentalmatrix.

Wir werden jetzt unter den größtmöglich allgemeinen Voraussetzungen die verschiedenen Randwertprobleme für die Gleichung $E[\varphi] = f$ betrachten und werden sehen, daß man sie als Spezialfälle des allgemeinen Problems aus § 2 betrachten kann, da man immer auf eine Gleichung vom Typus (2) geführt wird, welche man als gelöst annehmen kann, wenn man geeignete vollständige Vektorsysteme zur Verfügung hat.

Dazu müssen wir einige Voraussetzungen machen. Wir werden die Existenz von ν Paaren von linearen Differenzialoperatoren $\mathfrak{L}_s$, $\mathfrak{L}^*_s$ annehmen, welche auf FD definiert sind, die Vektoren φ und φ^* in Skalare transformieren, und für welche identisch in φ und φ^*

$$\int_{FD} \sum_{h,k}^{1,p} \sum_{i,j}^{0,n_r} b^{ij}_{hk}\, \varphi^{(i)}_k\, \varphi^{*(j)}_h\, d\sigma = \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma$$

gilt.

Die Gl. (6) schreibt sich dann:

$$\int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*] - \varphi^* \times E[\varphi]\}\, dT = \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma, \qquad (6')$$

während (7) folgende Gestalt annimmt:

$$\varphi_l(P) - \int_D [G_l(P, P') \times F(P')]\, d_{P'}\, T + \int_{FD} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[G_l(P, P')]\, d_{P'}\, \sigma. \qquad (7')$$

Wir werden für jeden Fall Gleichung (2) aus Gleichung (6′) und (5) aus (7′) herleiten.

Die Randwertprobleme, welche für die Gleichung

$$E[\varphi] = f \tag{8}$$

betrachtet werden, haben folgende Gestalt:

a) *Cauchy'sches Problem.*

Es wird ein Teil $F_1 D$ von $F D$ gesucht, wo wir die Werte der ν Formen $\mathfrak{L}_s[\varphi]$ willkürlich vorschreiben können, so daß sie die Lösung φ von (8) eindeutig bestimmen.

b) *Reines Problem.*

Für eine natürliche Zahl $\mu < \nu$ werden auf ganz $F D$ die Werte der Formen $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ vorgeschrieben, welche auch die Lösung von (8) bestimmen.

c) *Gemischtes Problem.*

Auf einem Teil $F_1 D$ von $F D$ sind die Werte der $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ und auf dem restlichen Teil $F_2 D = F D - F_1 D$ diejenigen der $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi]$, $\mathfrak{L}_{\mu+2}[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\nu[\varphi]$ vorgeschrieben.

d) *Ausbreitungsproblem.*

Es seien $F_1 D$ und $F_2 D$ zwei Teile von $F D$, welche höchstens Randpunkte gemeinsam haben; auf $F_1 D$ seien die Werte aller Formen $\mathfrak{L}_s[\varphi]$ und auf $F_2 D$ nur diejenigen der ersten vorgeschrieben.

Wir werden als Beispiel das gemischte Problem betrachten, und auf zwei verschiedene Arten zeigen, wie es sich auf das im § 2 betrachtete Problem zurückführen läßt.

Erste Art:

Man nimmt an:

$$U \equiv \Phi$$

U^* = Menge aller Vektoren φ^* aus Φ^*, welche $E[\varphi^*] = 0$ genügen;

U_1 = Menge aller ν-dimensionaler Vektoren, deren erste ν-μ-Komponenten auf $F_1 D$ und restlichen auf $F_2 D$ liegen;

U_2 = Menge aller $(\rho + \nu)$-dimensionalen Vektoren, deren erste ρ Komponenten in D summierbar, die restlichen ν stetig, μ von ihnen auf $F_1 D$ und ν-μ auf $F_2 D$ definiert sind;

L_1 = Operator, der den Punkt $u \equiv \varphi$ aus U in den Vektor aus U_1, dessen Komponenten $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi]$, $\mathfrak{L}_{\mu+2}[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\nu[\varphi]$ auf $F_1 D$ und $\mathfrak{L}_1[\varphi]$, $\mathfrak{L}_2[\varphi]$, ..., $\mathfrak{L}_\mu[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind, transformiert;

L^*_1 = Operator, der den Punkt $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_1 dessen Komponenten $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und $\mathfrak{L}^*_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind transformiert;

L_2 = Operator, der den Punkt u aus U in den Vektor aus U_2 transformiert, dessen erste p Komponenten diejenigen der $E[\varphi]$, die restlichen die $\mathfrak{L}_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\mu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und die $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\nu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind;

L^*_2 = Operator, der $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_2 transformiert, dessen erste p Komponenten die φ^* selbst sind, während die restlichen die $\mathfrak{L}^*_1[\varphi], \mathfrak{L}^*_2[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi]$ auf $F_1 D$ und die $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi]$ auf $F_2 D$ sind;

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma - \int_{F_2 D} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E[\varphi]\}\, d\,T + \int_{F_1 D} \sum_{s=1}^{\mu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma +$$

$$+ \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\sigma.$$

Mit diesen Bezeichnungen leitet man (2) aus (6′) ab, während (3) dem gemischten Problem c) äquivalent ist. Aus (7′) folgt (5) und daraus die Lösungsformel (4′).

Zweite Art.

$$U \equiv \Phi \qquad U^* \equiv \Phi^*;$$

U_1 = Raum der $(\nu + p)$-dimensionalen Vektoren, deren p Komponenten in D summierbar, μ-ν auf $F_1 D$ und μ auf $F_2 D$ definiert sind;

U_2 = wie vorher;

L_1 = Operator, der den Punkt $u \equiv \varphi$ aus U in den Vektor aus U_1 transformiert, dessen Komponenten in D diejenigen der φ, auf $F_1 D$: $\mathfrak{L}_{\mu+1}[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\nu}[\varphi]$ und auf $F_2 D$: $\mathfrak{L}_1[\varphi], \ldots, \mathfrak{L}_{\mu}[\varphi]$ sind;

L^*_1 = Operator, der den Punkt $v \equiv \varphi^*$ aus U^* in den Vektor aus U_1 transformiert, dessen Komponenten in D diejenigen der $E^*[\varphi^*]$, auf $F_1 D$: $\mathfrak{L}^*_{\mu+1}[\varphi^*], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\nu}[\varphi^*]$ und auf $F_2 D$: $L^*_1[\varphi^*], \ldots, \mathfrak{L}^*_{\mu}[\varphi^*]$ sind;

L_2 und L^*_2 wie vorher;

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_D \{\varphi \times E^*[\varphi^*]\}\, d\,T - \int_{F_1 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\,\sigma -$$

$$- \int_{F_2 D} \sum_{s=1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\,\sigma$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v]] = \int_D \{\varphi^* \times E[\varphi]\}\, d\,T + \int_{F_1 D} \sum_{s=1}^{\mu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\,\sigma +$$

$$- \int_{F_2 D} \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathfrak{L}_s[\varphi]\, \mathfrak{L}^*_s[\varphi^*]\, d\,\sigma.$$

Natürlich gibt es auch andere Arten, welche unser Problem als Spezialfall desjenigen des § 2 darstellen. Wir haben nur zwei beschrieben, für welche in wichtigen Spezialfällen, die besonders die mathematische Physik interessieren, Systeme $\{v_i\}$ erhalten wurden, die sich in vollständige Systeme $\{L^*_1(v_i)\}$ transformieren[10].

4. Die Konstruktion der Fundamentalmatrix für Systeme mit konstanten Koeffizienten.[11]

Es seien $a^{hk}_{i_1 i_2, \ldots, i_r}$ die als konstant angenommenen Koeffizienten der Operatoren E_{hk}; wir führen folgende Polynome ein:

$$a_{hk}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_r \\ i_1+i_2+\ldots+i_r \leqq n}} a^{hk}_{i_1, i_2 \ldots i_r}\, \xi_1^{i_1}\, \xi_2^{i_2} \ldots \xi_r^{i_r}$$

und bezeichnen mit $a'_{hk}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ die Polynome, welche die algebraischen Minoren der Elemente a_{hk} der Determinante $\| a_{hk} \|$ sind, mit $a(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ die Determinante selbst, und nennen letztere das charakteristische Polynom des Systems (8). Für willkürliche Werte der Parameter $\xi_1, \ldots, \xi_r$ betrachten wir den Vektor V_l, dessen Komponenten die

$$v_{lh} = a'_{hl}\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s} \qquad (l, h = 1, 2, \ldots, p) \tag{9}$$

sind. Man hat

$$E^*_k[V_l] = \sum_{h=1}^{p} E^*_{hk}\left[a'_{hk}\, e^{-\sum_{s-1}^{r} \xi_s x_s}\right] = \sum_{h=1}^{p} a_{hk}\, a'_{hl}\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s},$$

woraus

---

[10] *L. Amerio* (3), *G. Fichera* (2), (3), (7), (8).

[11] *M. Picone* (11).

$$E_k^*[V_l]\begin{cases} = a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s} & \text{für } k = l, \\ = 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases} \tag{10}$$

folgt. Man gelangt so zu

$$\int_D \{\varphi \times E^*[V_l]\}\, d\,T = \int_D \sum_{k=1}^{p} \varphi_k\, E_k^*[V_l]\, d\,T = a \int_D \varphi_l\, e^{-\sum_{s=1}^{r} \xi_s x_s}\, d\,T, \tag{11}$$

und wenn man

$$\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r} V_l}{\partial \xi_1^{\lambda_1} \partial \xi_2^{\lambda_2} \ldots \partial \xi^{\lambda_r}} = V_{l\,\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$$

setzt und die Identität (9) λ_i-mal in bezug auf ξ_i für $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ableitet, erhält man schließlich

$$\int_D \{\varphi \times E^*[V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}]\}\, d\,T =$$

$$= \int_D \varphi_l \left[a\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_r^{\lambda_r} + \lambda_1 \frac{\partial a}{\partial \xi_1} x_1^{\lambda_1 - 1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_r^{\lambda_r} + \ldots\right] e^{-\sum \xi_s x_s};$$

daraus folgert man, daß wenn in einem Punkte $(\xi_1^0, \ldots, \xi_r^0)$ die Determinante a von 0 verschieden ist, das Vektorsystem

$$E^*[V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}] \qquad (l = 1, 2, \ldots, p;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0, 1, 2, \ldots)$$

für $\xi_s = \xi_s^0\ (s = 1, \ldots, r)$ in der Klasse der in D summierbaren Vektoren abgeschlossen ist. Da die obengenannten Vektoren in ganz D stetig sind, folgt folgender Satz:

V. *Das System* (8) *habe konstante Koeffizienten und ihr charakteristisches Polynom sei nicht identisch gleich* 0, *dann bestimmen die Randwerte der Lösung und die ihrer partiellen Ableitungen bis zur* n^{ten} *Ordnung dieselbe eindeutig und erlauben ihre effektive Berechnung.*

Das Gebiet D sei im Parallelepiped $R: x_i^0 - d_i \leqq x_i \leqq x_i^0 + d_i$ enthalten, und es gelte:

$$a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \pi i \frac{\lambda_2}{d_2}, \ldots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \neq 0 \tag{12}$$

für jedes System ganzer Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Wir setzen in (6′) den Vektor $V_{l\,\lambda_1 \ldots \lambda_r}$, dessen k-te Komponente

$$v_{l\,\lambda_1 \dots \lambda_r\,k} = a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) e^{-\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}$$

ist, an Stelle des Vektors q^* ein, und erhalten so auf Grund der Identität (11)

$$a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right) \int_D q_l\, e^{-\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} x_s}\, d\,T =$$

$$= \int_D \{E[\varphi] \times V_{l\,\lambda_1 \dots \lambda_r}\}\, d\,T + \int_F \sum_{t=1}^{v} \mathfrak{L}_l[\varphi]\, \mathfrak{L}_t^*[V_{l\,\lambda_i \dots \lambda_r}]\, d\,\sigma$$

Hieraus bestimmen wir die Fourierkoordinaten der q_l in bezug auf die Systeme $\{e^{-\pi i \sum (\lambda_s/d_s)\, x_s}\}$ $(\lambda_1 \dots \lambda_r = -1, 0, 1, \dots)$. Man gelangt so zur Berechnung der Fundamentalmatrix $\| g_{lk}(P, P') \|$

$$g_{lk}(P, P') \sim$$

$$\sim \frac{1}{2^r d_1 \dots d_r} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{-\infty, +\infty} \frac{a'_{kl}\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)}{a\left(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r}\right)} e^{\pi i \sum_{s=1}^{r} \frac{\lambda_s}{d_s} (x_s - x'_s)},$$

wobei $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ die Koordinaten des Punktes P' bezeichnen. Für den Fall, daß es eine endliche Anzahl von Systemen von ganzen Zahlen gibt, für welche Ungleichung (12) nicht erfüllt ist, führen wir für jedes solche System einen Vektor $V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}$ ein, der dem Gleichungssystem

$$E^*_k[V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}] \begin{cases} = 0 & \text{für } l \neq k \\ = e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s} & \text{für } l = k \end{cases}$$

genügt; dann setzen wir in (6′) denselben an Stelle des Vektors V ein und gelangen so zur Gleichung:

$$\int_D \varphi_l\, e^{-\pi i \sum \frac{\mu_s}{d_s} x_s}\, d\,T = \int_D (E[\varphi] \times V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r})\, d\,T +$$

$$+ \int_F \sum_{t-1}^{v} \mathfrak{L}_t[\varphi]\, \mathfrak{L}_t^*[V_{l\,\mu_1 \dots \mu_r}]\, d\,\sigma,$$

woraus man für die Fundamentalmatrix

$$2^r d_1 \dots d_r g_{lk}(P, P') \sim \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} v_{l\,\mu_1 \dots \mu_r\,k}(x'_1 \dots x'_r)\, e^{-\pi i \Sigma \frac{\mu_s}{d_s} x_s} +$$

$$+ \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{-\infty\,+\infty} {}^{(\mu)} \frac{a'_{kl}(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r})}{a(\pi i \frac{\lambda_1}{d_1}, \dots, \pi i \frac{\lambda_r}{d_r})} e^{\pi i \Sigma \frac{\lambda_s}{d_s}(x_s - x'_s)}$$

erhält; hierbei bedeutet $\Sigma^{(\mu)}$, daß bei der Summierung die Glieder mit den obengenannten Systemen von Zahlenwerten auszulassen sind.

5. Integro-Differentialgleichungen.

Andere Probleme, deren Lösung sich auf die allgemeine Methode des § 2 zurückführen läßt, sind die linearen Integro-Differentialgleichungen, die z. B. in der Elastizitätslehre beim Studium der Vererbungsprobleme vorkommen. Wir werden uns mit der Betrachtung einer besonderen einfachen Integro-Differentialgleichung begnügen, aber die Resultate lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die Gleichungen und Gleichungssysteme von komplizierterem Typus verallgemeinern.

Es sei D ein beschränktes reguläres Gebiet im Descartes'schen Raume $x\,y\,z$, und T ein Zylinder des Raumes $x\,y\,z\,t$, mit folgenden Beschränkungen

$$(x, y, z) \subset D \qquad 0 \leqq t \leqq t_0$$

In T betrachten wir folgende Integro-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right] d\tau = 0, \qquad (19)$$

wobei $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ im Quadrate, dessen Endpunkte $(0, 0)$ und (t_0, t_0) sind, stetige Funktionen bedeuten.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\int_t^{t_0}\left[\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}\varphi(\tau,t)+\frac{\partial^2 v(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}\psi(\tau,t)\right] d\tau=0 \qquad (13')$$

nennt man die zu (9) adjungierte Gleichung.

Wir nennen $F_1 T$ den durch folgende Beschränkungen definierten Teil von $F T$:

$$(x, y, z) \subset F D \qquad 0 \leqq t \leqq t_0.$$

Wenn u und v in T mit ihren ersten Ableitungen in bezug auf x, y, z, stetige und mit ihren zweiten Ableitungen in bezug auf dieselben Variablen in $T - F_1 T$ stetige Lösungen der (13) und (13′) sind, dann besteht der folgende Reziprozitätssatz:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{FD}[v(t)\frac{du(t)}{dn}-u(t)\frac{dv(t)}{dn}]\,d\sigma+\int_0^{t_0} dt\int_t^{t_0} d\tau\int_{FD}\{[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial x}-$$

$$-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial x}]f(\tau,t)\cos(n,x)+[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial y}-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}]\varphi(\tau,t).$$

$$\cos(n,y)+[v(\tau)\frac{\partial u(t)}{\partial z}-u(t)\frac{\partial v(\tau)}{\partial z}]\psi(\tau,t)\cos(n,z)\}\,d\sigma=0 \qquad (14)$$

Wenn wir eine geeignete Fundamentallösung, deren Existenz sich beweisen läßt, einführen, dann erhält man eine Formel, welche die Werte einer Lösung u von (13) in jedem inneren Punkte von T mit Hilfe der für jeden Zeitpunkt t als bekannt vorausgesetzten Randwerte von u, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, ausdrückt[12].

Wir betrachten das folgende Randwertproblem für Gleichung (13):

Es wird eine Lösung $u(x, y, z, t)$ von (13) gesucht, wenn ihre Randwerte auf $F_1 T$ vorgeschrieben sind.

Dieses Problem führt auf dasjenige des § 2 zurück, wenn man wie folgt setzt:

U = Menge der Lösungen der (13), die den obengenannten Regularitätsbedingungen genügen;

U^* = Menge der Lösungen (13′), die denselben Stetigkeitsbedingungen genügen;

---

[12] S. *V. Volterra* (1), S. 82.

$U_1 \equiv U_2 =$ Menge der in $F_1\,T$ stetigen Funktionen;

$$L_1[u] = \frac{d\,u(t)}{d\,n} + \int_0^t (\Sigma \frac{\partial\,u(\tau)}{\partial\,x} f(t,\tau)\cos(n,x))\,d\,\tau,$$

$$L^*_1[v] = v(t) \qquad \text{für } (x,y,z) \subset F\,D,$$

$$L_2[u] = u(t) \qquad \text{für } (x,y,z) \subset F\,D,$$

$$L^*_2[v] = \frac{d\,v(t)}{d\,n} + \int_t^{t_0} (\Sigma \frac{\partial\,v(\tau)}{\partial\,x} f(\tau,t)\cos(n,x))\,d\,\tau,$$

$$F_1[L_1[u], L^*_1[v]] = \int_0^{t_0} d\,t \int_{F\,D} L_1[u]\,.\,v\,d\,\sigma,$$

$$F_2[L_2[u], L^*_2[v] = \int_0^{t_0} d\,t \int_{F\,D} u\,.\,L^*_2[v]\,d\,\sigma.$$

Man sieht leicht ein, daß (2) und (14) zusammenfallen. Das Problem ist auf diese Weise auf die Konstruktion eines in F_1T hilbertisch vollständigen Systems von Lösungen von (13′) zurückgeführt. Analog behandelt man die anderen Probleme.

6. Gleichungen, die sich auf Differentialformen beziehen.

Eine weitere interessante Anwendung des § 2 ergibt sich aus der Betrachtung von Randwertproblemen, welche sich auf äußere Differentialformen beziehen. Wenn u eine Form k-ten Grades in n Veränderlichen ist, so definieren wir einen Operator E, welcher die gegebene Form in eine Form $E[u]$, $(n\text{-}k)$-ten Grades transformiert, die im Falle, daß u ein Skalar ist, sich auf den gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperator zweiter Ordnung reduziert. Es besteht der folgende Reziprozitätssatz:

$$\int_D (u\,E[v] - v\,E[u]) = \int_{F\,D} (u\,L[v] - v\,L[u]),$$

wobei L einen bestimmten Operator bedeutet.

Man sieht leicht ein, wie man die Methode des § 2 auf das Problem, eine Form u aufzufinden, welche der Gleichung

$$E[u] = \varphi$$

genügt, und für welche die Randwerte der Koeffizienten, oder diejenigen der $L[u]$ oder endlich (gemischtes Problem) die der u auf einem Teile und der $L[u]$ auf einem anderen Teile des Randes vorgeschrieben sind, anwenden kann.

7. Existenzprobleme.

Die im § 2 beschriebene und in den folgenden angewandte Methode setzte voraus, daß die Existenz der Lösungen der betrachteten Probleme schon gesichert war. Wir werden aber sehen, daß man aus Gleichung (2) auch ein Verfahren ableiten kann, welches erlaubt, unter gewissen speziellen Voraussetzungen und immer, wenn wir ein besonderes System $\{v_i\}$, das gewissen Vollständigkeitsbedingungen genügt, zur Verfügung haben, den Existenzbeweis zu führen[13].

Zunächst setzen wir voraus: $U^* \subset U$, $\overline{L_1[v]} \equiv L^*_1[v]$, wodurch Gleichung (2) sich wie folgt schreiben läßt:

$$F_1[L_1[u], \overline{L_1[v]}] = F_2[L_2[u], L^*_2[v]] \tag{2'}$$

Außerdem nehmen wir an:

a) *Es gibt einen linearen Raum W, der U enthält, so daß, wenn wir das Definitionsgebiet von L_1 und L_2 auf das ganze W erweitern, die Gleichung (2') für jedes w in W und v in U^* erfüllt ist, während die Gleichung*

$$L_2[w] = u_2$$

lösbar ist.

b) *U_1 sei abgeschlossen und man verfüge über ein Punktsystem $\{v_i\}$ aus U^* so, daß nach der Orthogonalisierung in bezug auf das Funktional F_1 des Systems $\{L_1[v_i]\}$ die Gleichung*

$$L_1[u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i L_1[v_i] \tag{14}$$

im Raume U lösbar wird, wobei $\{c_i\}$ eine Zahlenfolge mit konvergenter Summe $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ darstellt.

c) *Das System $\{L^*_2[v_i]\}$ ist im Raume U_2 in bezug auf das Funktional F_2 abgeschlossen.*

Dann gilt folgender Existenzsatz:

VI. *Unter den Voraussetzungen* a), b), c), *gibt es einen Punkt im Raum U, welcher der Gleichung*

$$L_2[u] = u_2 \tag{3}$$

genügt.

Denn sei w der Punkt des Raumes w, für welchen $L_2[w] = u_2$ gilt, und setzen wir:

$$c_i = F_1[L_1[w], \overline{L_1[v_i]}],$$

[13] S. *G. Fichera* (5), (6), (7), (8).

dann gibt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\Sigma \mid c_i \mid^2 \leqq F_1 [L_1 [w] \overline{L_1 [w]}].$$

Wir behaupten, daß die Lösung von (14) gleichzeitig die Lösung von (3) ist. Man hat nämlich:

$$F_2 [L_2 [u] - u_2, L^*_2 [v_i]] = F_2 [L_2 [u], L^*_2 [v_i]] - F_1 [L_1 [w], \overline{L_1 [v_i]}] =$$
$$= F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 ([v_i]}] - c_i.$$

Andererseits gilt aber

$$F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 [v_i]}] = F_1 [\sum_{j=1}^{\infty} c_j L_1 [v_j], L_1 [v_i]] = c_i,$$

woraus

$$F_2 [L_2 [u] - u_2, L^*_2 [v_i]] = 0$$

folgt, und auf Grund von Annahme c): $L_2 [u] = u_2$.

Man kann von Annahme c) absehen, wenn vorher folgender Satz bewiesen ist:

c') *Nötige und hinreichende Bedingung, daß ein Punkt u aus U der Gleichung* (3) *genügt, ist, daß er dem unendlichen Gleichungssystem*:

$$F_1 [L_1 [u], \overline{L_1 [v_i]}] = F_2 [u_2, L^*_2 [v_i]]$$

genügt. Man stellt nämlich leicht fest, daß der vorher bewiesene Existenzsatz weiter besteht, wenn wir gleichzeitig die Voraussetzungen a) und b) festhalten. Dieses einfache Beweisverfahren ist schon auf verschiedene Fundamentalprobleme der mathematischen Physik, wie z. B. das Gleichgewichtsproblem einer eingespannten Platte und andere gemischte Randwertaufgaben für Gleichungen vom elliptischen Typus, zum Existenzbeweis angewandt worden. Als Beispiel wollen wir hier zeigen, wie man mit diesem Verfahren leicht einen Beweis des Dirichletschen Prinzips erhält, d. h. die Existenz einer harmonischen Funktion, deren Randwerte vorgeschrieben sind, beweist.

Es genügt zu setzen:

W = Menge aller in einem beschränkten regulären Gebiete definierten Funktionen, deren erste Ableitungen quadratisch summierbar sind.
U = Menge aller in D harmonischen Funktionen aus W;
U^* = Menge aller in D harmonischen und biregulären Funktionen;
U_1 = Menge der in D r-dimensionalen hilbertschen Vektoren;
U_2 = Raum der auf F D summierbaren Funktionen;
L_1 = Operator, welcher einer Funktion w aus W den Vektor grad w zuordnet;

L_2 = Operator, welcher einer Funktion w ihre Randwerte zuordnet;
$L^*_2 \equiv \frac{d}{d\,n}$, wobei n die äußere Normalenrichtung auf $F\,D$ bedeutet.

$$F_1\,[L_1\,[w], \overline{L_1\,[v]}] = \int_D (\operatorname{grad} w \times \overline{\operatorname{grad} v})\,d\,T$$

$$F_2\,[L_2\,[w], L^*_2\,[v]] = \int_{F\,D} w\,\frac{d\,\bar{v}}{d\,n}\,d\,\sigma$$

Wenn $w \subset W$ und $v \subset U^*$, dann gilt:

$$\int_D (\operatorname{grad} w \times \operatorname{grad} v)\,d\,\sigma = \int_{F\,D} w\,\frac{d\,v}{d\,n}\,d\,\sigma,$$

das heißt

$$F_1\,[L_1\,[w], L_1\,[v]] = F_2\,[L_2\,[w], L^*_2\,[v]]$$

ist erfüllt.

Es sei u_2 eine auf dem Rande definierte Funktion und es gebe ein w aus W, welche auf $F\,D$ mit u_2 zusammenfällt. Es sei $\{v_i\}$ das System der harmonischen Polynome.

Gleichung (14) nimmt folgende Gestalt an:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \operatorname{grad} v_i$$

und ist sicher lösbar, da die rechterhand stehende Reihe im Mittel, also auch gleichförmig im Innern von D konvergiert. Man sieht, daß die Annahmen a) und b) erfüllt sind; aber auch Voraussetzung c) ist erfüllt, da man die Vollständigkeit (von einer Konstanten abgesehen) des Systems $\{\frac{d\,v_i}{d\,n}\}$ auf $F\,D$ beweisen kann. Man kann auch den Satz c′) beweisen, wodurch man die Existenz einer im Gebiete D harmonischen Funktion mit vorgeschriebenen Randwerten in der Klasse U sichert.

Literatur.

Amerio Luigi:

1. *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2\,u - \lambda^2\,u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*, Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 78 (1944—45).
2. *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k}\,u = f$, Annali di Matematica pura ed applicata, Tomo 24, Serie IV (1945).
3. *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico*, American Journal of Mathematics, vol. LXIX, n. 3 (July, 1947).

4. *Sull'equazione di propagazione del calore*, Rend. di Matematica e delle sue Applicazioni (1946).

De Rham Georges — Bidal Pierre:

1. *Les formes différentielles harmoniques*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 19, MCMXLVI/XLVII, Fasc. I.

Fichera Gaetano:

1. *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo*, Rend. Seminario Matem. Università di Padova, vol. XVII (1948).
2. *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, Annali di Matem. pura ed applicata, tomo 27, serie IV (1948).
3. *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$, Giornale di Matematiche di Battaglini, s. IV, vol. 77 (1948).
4. *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di Analisi funzionale lineare*, Giornale di Matem. di Battaglini, s. IV, vol. 78 (1948—49).
5. *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. V (1948).
6. *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione ed ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1949).
7. *Sui problemi dell'elasticità piana*, Rend. della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari (1949).
8. *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1950).
9. *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. III (1947).

Ghizzetti Aldo:

1. *Sul metodo della transformata parziale di Laplace ad intervallo d'integrazione finito*, Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, 1947.
2. *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1948).
3. *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali*, Rend. di Mat. e delle sue appl. (1946).

Hodge W. V. D.:

1. *A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties*, Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, v. 36 (1932).
2. *Harmonic functional in a riemannian space*, Ibid. se. 2, vol. 38 (1933).
3. *The existence theorems for harmonic integral*, Ibid., ser. 2, vol. 41 (1936).

Miranda Carlo:

1. *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. III (1947).

Picone Mauro:

1. *Appunti di Analisi Superiore*, I Ediz. Rondinella, Napoli (1940).
2. *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuove applicazioni della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*, Atti Acc. Scienze Torino (1939—40).
3. *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. II (1947).
4. *Lezioni di Analisi funzionale lineare*, Istituto di Alta Matematica, Roma (1942).
5. *Lezioni di Analisi funzionale*, Tumminelli, Roma (1947).

Volterra Vito:

1. *Fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris (1913).

Über eine einheitliche Methode zum Beweis gewisser Schließungssätze.

Von
Leopold Peczar, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 27. Januar 1950.)

1. Die *allgemeine Miquel'sche Kreisfigur* ist eine Konfiguration von acht Punkten und sechs Kreisen, bei der durch jeden Punkt drei Kreise gehen und auf jedem Kreis vier Punkte liegen. Sie kann bekanntlich kurz so beschrieben werden:

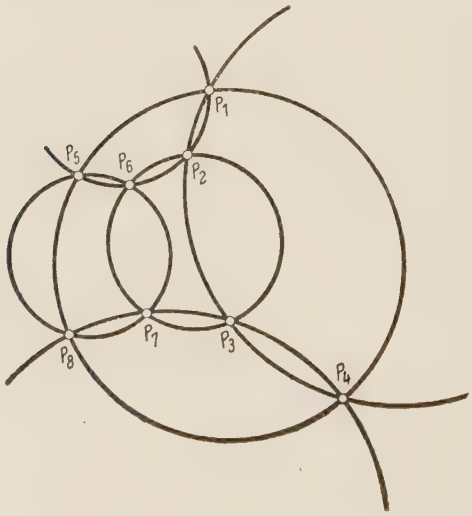

Abb. 1.

Satz 1: Legt man für vier Punkte eines Kreises eine zyklische Folge fest und durch je zwei so aufeinanderfolgende Punkte jedesmal irgendeinen Kreis, so gehören die vier weiteren Schnittpunkte benachbarter dieser Kreise selbst einem Kreis an.

Das wurde von A. Miquel und von anderen Geometern[1] auf elementargeometrischem Wege bewiesen oder auch, unter Verwendung von darstellend-geometrischen Methoden[2], wie z. B. Netzprojektion oder stereographische Projektion aus Sätzen der projektiven Geometrie des dreidimensionalen Raumes abgeleitet. In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß

[1] A. Miquel, Sur les intersections des cercles et des spheres, Liouville Journ. math. 3 (1838), S. 517.

Miquel's Beweis ist auch in J. L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Oxford 1916, S. 85ff., wiedergegeben.

der Satz 1 die Folge eines einfachen algebraischen Satzes ist, der sich auch als die Wurzel noch anderer Sätze der Geometrie erweist.

Um eine dem Satz 1 entsprechende algebraische Aussage zu erhalten, fassen wir die Punkte (x, y) der endlichen reellen Ebene als die Bilder der gewöhnlichen komplexen Zahlen $z = x + i\,y$ $(i^2 = -1)$ auf. (*Gauß'sche Zahlenebene*). Wir können dann, da die komplexen Zahlen einen Körper bilden, vier Punkten $z_k = x_k + i\,y_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, durch

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = D\,V\,(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

eine Zahl zuordnen, die als das zu der ersichtlichen Reihenfolge gehörige *Doppelverhältnis* derselben bezeichnet wird. Es ist dann und nur dann reell (d. h. es gehört einem gewissen Unterkörper des Körpers aller $z = x + i\,y$ an), wenn die vier gegebenen Punkte auf einem Kreis oder auf einer Geraden (Kreis mit unendlich großem Radius) liegen.

Bezeichnen wir die komplexen Zahlen der Punkte P_k (Abb. 1) entsprechend mit z_k $(k = 1, 2, \ldots 8)$, so erweist sich nach den eben gemachten Feststellungen der Satz 1 mit dem folgenden als äquivalent:

Satz 1': Sind z_k $(k = 1, 2, \ldots 8)$ acht komplexe Zahlen, und die $D\,V\,(z_1, z_2, z_5, z_6)$, $D\,V\,(z_2, z_3, z_6, z_7)$, $D\,V\,(z_3, z_4, z_7, z_8)$, $D\,V\,(z_4, z_1, z_8, z_5)$ reell, so haben entweder beide Doppelverhältnisse

$$D\,V\,(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ und } D\,V\,(z_5, z_6, z_7, z_8)$$

reelle oder beide nicht reelle Werte.

Der Beweis dieses Satzes könnte nun leicht erbracht werden; ich will aber einen Schritt weiter gehen und mit dem selben Aufwand gleich einen allgemeineren Satz ableiten. Um die Doppelverhältnisse bilden zu können, brauchen die z_k nicht unbedingt einem Körper entnommen sein. Es genügt vorauszusetzen, daß sie Elemente eines Quotientenringes sind, wenn man nur darauf achtet, daß dann etwaige Nullteiler nie als Divisoren auftreten.

2. Es sei also R ein Quotientenring, das ist ein kommutativer Ring in dem die Gleichung

$$q\,z = p,$$

wenn p und q Elemente von R sind und q kein Nullteiler ist, stets eine

---

[2] K. Strubecker, Über eine Kreisfigur, Journal f. reine und angew. Math., Bd. 169, Heft 2, 1933, S. 79.

Lösung $z = \frac{p}{q}$ hat. Sind α, β, γ und δ irgendwelche Elemente aus R, so wird durch

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \ldots\ldots\ldots (S)$$

jedem z aus R, für das $\gamma z + \delta$ nicht Nullteiler ist, eindeutig ein z', ebenfalls aus R zugeordnet. Es entspricht so einem z_1 ein z_1' und einem z_2 ein z_2' aus R. Aus

$$z_1 = z_2 \text{ folgt unmittelbar } z_1' = z_2'.$$

Gehen wir umgekehrt von

$$z_1' = z_2', \text{ d. h. } \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} = \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta}$$

aus, so folgt

$$(\alpha \delta - \beta \gamma) z_1 = (\alpha \delta - \beta \gamma) z_2,$$

was nur dann

$$z_1 = z_2$$

ergibt, wenn $\alpha \delta - \beta \gamma$ nicht Nullteiler ist.

Satz 2: Durch eine lineare Substitution wird genau dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung zweier Teilmengen von R aufeinander vermittelt, wenn ihre Determinante nicht Nullteiler ist.

Sind z_1, z_2, z_3, z_4 vier Elemente von R und $z_2 - z_3$, $z_1 - z_4$ nicht Nullteiler, so können wir in der angegebenen Anordnung ihr Doppelverhältnis

$$D\,V\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

bilden. Wenn weiter $\gamma z_k + \delta$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ nicht Nullteiler sind, so ergibt eine einfache Rechnung den

Satz 3: Das Doppelverhältnis von vier Elementen von R, insofern es sich bilden läßt, ist invariant gegenüber allen linearen Transformationen, deren Determinante nicht Nullteiler ist.

Es sollen nun A ein Körper, der in R enthalten ist, und w_1, w_2, w_3 drei Elemente von R sein, für die

$$w_2 - w_3 \text{ nicht Nullteiler } \ldots\ldots \quad (1)$$

ist. Mit 0 bezeichnen wir das Einselement der additiven Gruppe von A und mit 1 das seiner multiplikativen Gruppe. Die Gesamtheit aller z

aus R, die $w_1 - z$ nicht zu einem Nullteiler machen und für die immer

$$DV(w_1, w_2, w_3, z) = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} \cdot \frac{w_2 - z}{w_1 - z} = a$$

A angehört, soll die durch w_1, w_2, w_3 bestimmte A-Kette K_A genannt werden. Sie enthält w_2, w_3 und es soll auch w_1 zu ihr gezählt werden. In R wird jedes Produkt, von dem ein Faktor Nullteiler ist, selbst zum Nullteiler. Ein Element a des Körpers A ist aber, falls es von Null verschieden ist, nie Nullteiler. Daher wird $w_2 - z$ nie ein von Null verschiedener Nullteiler und darf

$$w_1 - w_3 \text{ überhaupt nicht Nullteiler } \ldots\ldots \tag{2}$$

von R sein.

Für die z von K_A muß

$$z = \frac{w_1 a - w_2 \dfrac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}}{a - \dfrac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}}$$

sein. Damit haben wir eine Parameterdarstellung für K_A erhalten. Die Elemente z von K_A entsprechen den a aus A in einer linearen Transformation, deren Determinante

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}(w_2 - w_1)$$

auf Grund der Voraussetzungen (1), (2), wenn

$$w_2 - w_1 \text{ nicht Nullteiler } \ldots\ldots \tag{3}$$

ist, ebenfalls nicht Nullteiler ist. In diesem Fall wird

$$\begin{aligned} D\,V(z_1, z_2, z_3, z_4) &= D\,V(a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &= \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_4}{a_1 - a_4} \\ &= b \end{aligned}$$

sein, wenn z_i, a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vier Elemente von K_A, bzw. die ihnen entsprechenden von A sind. Da A ein Körper ist, muß ihm auch b angehören.

Satz 4: Das Doppelverhältnis von vier Elementen einer A-Kette gehört dem Körper A an.

3. Es seien nun acht Elemente z_i $(i = 1, 2, \ldots 8)$ von R gegeben, von denen

$$(z_1, z_6, z_5, z_2),$$
$$(z_2, z_7, z_6, z_3),$$
$$(z_3, z_8, z_7, z_4)$$

und $$(z_4, z_5, z_8, z_1)$$

je einer A-Kette angehören. Es müssen dann

$$D\,V\,(z_1, z_6, z_5, z_2) = \frac{(z_1 - z_5)\,(z_6 - z_2)}{(z_6 - z_5)\,(z_1 - z_2)} = a,$$

$$D\,V\,(z_2, z_7, z_6, z_3) = \frac{(z_2 - z_6)\,(z_7 - z_3)}{(z_7 - z_6)\,(z_2 - z_3)} = b,$$

$$D\,V\,(z_3, z_8, z_7, z_4) = \frac{(z_3 - z_7)\,(z_8 - z_4)}{(z_8 - z_7)\,(z_3 - z_4)} = c,$$

$$D\,V\,(z_4, z_5, z_8, z_1) = \frac{(z_4 - z_8)\,(z_5 - z_1)}{(z_5 - z_8)\,(z_4 - z_1)} = d,$$

zu bilden und a, b, c, d Elemente des Körpers A sein. Demnach liegt aber auch

$$\frac{a \,.\, c}{b \,.\, d} = \frac{z_4 - z_1}{z_5 - z_6} \cdot \frac{z_7 - z_6}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_7 - z_8} \cdot \frac{z_8 - z_5}{z_3 - z_4}$$
$$= \frac{(z_3 - z_2)\,(z_1 - z_4)}{(z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4)} \cdot \frac{(z_5 - z_8)\,(z_7 - z_6)}{(z_7 - z_8)\,(z_5 - z_6)}$$
$$= D\,V\,(z_3, z_1, z_2, z_4) \;.\; D\,V\,(z_5, z_7, z_8, z_6,)$$

in A, woraus sofort folgt, daß mit $D\,V\,(z_3, z_1, z_2, z_4)$ immer auch $D\,V\,(z_5, z_7, z_8, z_6)$ ein Element des Körpers A ist und umgekehrt. Es gehören somit beide Quadrupel

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ und } z_5, z_6, z_7, z_8$$

oder keines je einer A-Kette an.

Satz 5: Liegen die vier Quadrupel

$$(z_1, z_6, z_5, z_2),$$
$$(z_2, z_7, z_6, z_3),$$
$$(z_3, z_8, z_7, z_4),$$
$$(z_4, z_5, z_8, z_1)$$

von acht Elementen z_i $(i = 1, 2, \ldots 8)$ eines kommutativen Quotientenringes R in je einer A-Kette, so sind entweder beide oder keines der weiteren Quadrupel

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ und } (z_5, z_6, z_7, z_8)$$

in je einer A-Kette enthalten.

Die acht Elemente und sechs A-Ketten des Satzes 5 bilden eine 8_3, 6_4 Konfiguration von Elementen und A-Ketten des Quotientenringes R. Durch jedes der acht Elemente gehen drei der sechs A-Ketten und in jeder der sechs A-Ketten liegen vier der acht Elemente.

Nehmen wir weiter speziell auch (z_1, z_3, z_6, z_8) in einer A-Kette liegend an, so ist das auf Grund des Satzes 5 ebenso für (z_2, z_4, z_5, z_7) der Fall. Wir kommen so zu einer Konfiguration von acht Elementen und acht A-Ketten von R, bei der durch jedes Element vier A-Ketten gehen und auf jeder A-Kette vier Elemente liegen. Es handelt sich also um eine 8_4, 8_4 Konfiguration.

Satz 6: Liegen die sechs Quadrupel

$$(z_1, z_6, z_5, z_2),$$
$$(z_2, z_7, z_6, z_3),$$
$$(z_3, z_8, z_7, z_4),$$
$$(z_4, z_5, z_8, z_1),$$
$$(z_1, z_2, z_3, z_4),$$
$$(z_1, z_3, z_6, z_8)$$

von acht Elementen eines Quotientenringes jedes in einer A-Kette, so gehören auch

$$(z_5, z_6, z_7, z_8) \text{ und } (z_2, z_4, z_5, z_7)$$

je einer an. Die acht Elemente und acht A-Ketten bilden eine Konfiguration 8_4, 8_4.

Wir nennen, die durch die Sätze 5 und 6 sichergestellten Konfigurationen kurz *allgemeine*, bzw. *spezielle A-Kettenfiguren* im Quotientenring R.

4. Wir wollen nun drei Beispiele betrachten:

a) R sei speziell der Körper der komplexen Zahlen $z = x + i\,y$. Durch ihn kann eindeutig die Gesamtheit der Punkte der endlichen reellen Ebene beschrieben werden. Weiter wählen wir für A den Unterkörper der reellen Zahlen. Wie wir schon im Abschnitt 1 gesehen haben, entsprechen dann den A-Ketten die reellen Kreise und Geraden der Ebene. Satz 1 erscheint so als Folge des Satzes 5 und ist damit durch die einfachen Überlegungen von Abschnitt 3 bewiesen. Der allgemeinen und der speziellen A-Kettenfigur entsprechen die *allgemeine* und die *spezielle Miquel'sche Kreisfigur*.

b) Adjungieren wir zum Körper der reellen Zahlen die duale Einheit ε für die die Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$ gilt, so bekommen wir eine *Menge dualer Zahlen* $a + \varepsilon b$, wobei a als ihr *Skalar-* und b als ihr *Dualteil* bezeichnet wird. Die dualen Zahlen $a + \varepsilon b$ (a, b reell) bilden einen kommutativen Ring.

Zwei Zahlen wie $a+\varepsilon b$ und $a-\varepsilon b$, die sich nur durch das Vorzeichen des Dualteiles unterscheiden, bezeichnen wir als *konjungiert duale Zahlen*. Eine duale Zahl stimmt mit ihrer konjugiert dualen überein, wenn sie reell ist und umgekehrt. Es ist

$$(a + \varepsilon b) \cdot (a - \varepsilon b) = a^2,$$

die *Norm* von $a + \varepsilon b$ und $a - \varepsilon b$. Durch duale Zahlen mit nicht verschwindender Norm können wir dividieren. Ist jedoch $a = 0$, so wird

$$(\varepsilon b)^2 = 0$$

was besagt, daß rein duale Zahlen Nullteiler von R sind. Es sind das die einzigen Nullteiler. Die dualen Zahlen $a + \varepsilon b$, wo a und b reell sind, bilden demnach einen Quotientenring.

Wir wollen diesen Ring als System R auffassen und in ihm als Körper A den der reellen Zahlen auszeichnen. Das Doppelverhältnis von vier Elementen

$$w_k = x_k + \varepsilon y_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

und

$$z = x + \varepsilon y$$

aus R ist dann durch

$$DV(w_1, w_2, w_3, z) = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} \cdot \frac{w_2 - z}{w_1 - z}$$

$$= \frac{(x_1 - x_3) + \varepsilon (y_1 - y_3)}{(x_2 - x_3) + \varepsilon (y_2 - y_3)} \cdot \frac{(x_2 - x) + \varepsilon (y_2 - y)}{(x_1 - x) + \varepsilon (y_1 - y)}$$

gegeben und kann, wenn

$$x_1 \neq x_3, \; x_1 \neq x, \; x_2 \neq x_3, \; x_2 \neq x$$

sind, in

$$= \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x}{x_1 - x} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} + \frac{y_2 - y}{x_2 - x} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \right) \right]$$

umgeformt werden. Die dabei zu machenden Voraussetzungen sind keine anderen als die, die wir nach Abschnitt 2 sowieso vorschreiben müssen. Das Doppelverhältnis gehört A an, d. h. es ist reell, wenn

$$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} + \frac{y_2 - y}{x_2 - x} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0$$

gilt. Setzen wir die reelle Zahl

$$\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = c$$

und multiplizieren wir die eben erhaltene Gleichung mit $(x_1 - x)(x_2 - x)$, so wird

$$c x^2 + x(y_1 - y_2 - c x_2 - c x_1) + y(x_2 - x_1) + y_2 x_1 - y_1 x_2 + c x_1 x_2 = 0 \quad \ldots\ldots (4).$$

Wir können nun nach dem Vorgange von J. Grünwald[3] mit Hilfe eines rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystems jeder dualen Zahl $z = x + \varepsilon y$ in einer Ebene einen Punkt (x, y) zuordnen. Wir erhalten so die *duale Zahlenebene*. Den durch

$$D\,V(w_1, w_2, w_3, z) = a \text{ (reell)}$$

gegebenen A-Ketten, entsprechen dort die durch (4) bestimmten Kurven. Es sind das für $c \neq 0$, $x_1 \neq x_2$ Parabeln mit zur y-Achse paralleler (kurz: y-paralleler) Achse, für $c \neq 0$, $x_1 = x_2$ y-parallele Geradenpaare und für $c = 0$ einzelne Geraden. Davon scheidet $x_1 = x_2$ wegen Abschnitt 2 (3) aus. Den A-Kettenkonfigurationen entsprechen somit *Parabelfiguren*:

Satz 7: Ist unter vier Parabeln mit paralleler Achse irgend eine zyklische Folge festgelegt und liegen vier Schnittpunkte der vier Paare in ihr benachbarter Parabeln selbst auf einer Parabel der gleichen Achsenrichtung, so gehören auch die restlichen vier Schnittpunkte dieser Nachbarpaare einer solchen Parabel an.

Wir kommen so zu zwei Parabelfiguren[4]. Beide enthalten acht Punkte, die eine (allgemeine) sechs und die andere (spezielle) acht Parabeln gleicher Achsenrichtung. Sie stellen 8_3, 6_1, bzw. 8_4, 8_4 Konfigurationen von achsenparallelen Parabeln dar.

c) Die lineare Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 y = 0,$$

[3] J. Grünwald, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie, Monatshefte für Mathematik und Physik 17, 1906, S. 81.

[4] U. Graf, R. Kahlau, Über eine Gruppe von Parabelsätzen, Sitzber. Berliner math. Gesellschaft 34, S. 30–32.

U. Graf, R. Kahlau, Einige Sätze über Parabeln gleicher Achsenrichtung, Unterr. Bl. 41, S. 114–117.

wo (x, y) die Koordinaten von Punkten der Ebene bezüglich eines rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystems sind, ist für reelle a_0, a_1, a_2 und $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 > 0$ die Gleichung einer reellen Geraden. Die Gleichungen

$$\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} x + \frac{a_2}{a_3} y = 0$$
$$(a_3 = \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2})$$

stellen dann die beiden die Gerade überdeckenden *Speere*, das sind die mit einem Durchlaufsinn versehenen Geraden, dar. Von einem reellen Speer hat jeder reelle Punkt (s, t) der Ebene einen Abstand d, der durch

$$d = \frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} s + \frac{a_2}{a_3} t$$

gegeben ist und dessen Vorzeichen darüber Auskunft gibt, auf welcher Seite des Speeres der Punkt liegt. Die von (0, 0, 0, 0) verschiedenen an

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$$

gebundenen homogenen reellen Quadrupel (a_0, a_1, a_2, a_3) können als Koordinaten der reellen Speere der Ebene angesehen werden.

$$\frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} s + \frac{a_2}{a_3} t = r$$

oder

$$a_0 + a_1 s + a_2 t - r a_3 = 0$$

legt dann alle Speere fest, die vom Punkt (s, t) den konstanten Abstand r haben. Diese umhüllen aber einen Kreis mit dem Mittelpunkt (s, t) und dem Radius r, dem durch die Orientierung der Speere ein Durchlaufsinn mitgeteilt wird. Genauer gesagt berühren diese Speere somit einen *orientierten Kreis* (*Zykel*) und

$$a_0 + s a_1 + t a_2 - r a_3 = 0$$

stellt seine Gleichung in Speerkoordinaten dar. Der Punkt (s, t) ist sein *Mittelpunkt* und r sein *Radius*.

Durch

$$z = x + \varepsilon y$$
$$x = \frac{a_1}{a_2 - a_3}$$
$$y = \frac{a_0}{a_2 - a_3}$$

wird jedem Speer

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

für den

$$a_2 \neq a_3 \text{ und damit } a_1 \neq 0$$

ist, der also nicht zum positiven Speer der x-Achse parallel ist, eine duale Zahl zugeordnet.

$$w_k = x_k + \varepsilon\, y_k \qquad (k = 1, 2, 3,) \qquad z = x + \varepsilon\, y$$

mögen nun die dualen Zahlen sein, die vier solchen Speeren entsprechen. Es soll dann

$$D\,V\,(w_1, w_2, w_3, z) = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} \cdot \frac{w_2 - z}{w_1 - z}$$

auch das Doppelverhältnis der in der gleichen Reihenfolge genommenen Speere genannt werden. Es ist reell, wenn für den Skalarteil x und den Dualteil y von z die Bedingung (4) erfüllt ist, die wir

$$c\,x^2 + a\,x + b\,y + d = 0$$

schreiben können, wenn wir die dortigen (reellwertigen) Klammerausdrücke, bzw. mit a, b und d abkürzen. Drücken wir die x und y durch die Speerkoordinaten a_i $(i = 1, \ldots\ldots 4)$ aus, so bekommen wir

$$c\,\frac{{a_1}^2}{(a_2 - a_3)^2} + a\,\frac{a_1}{a_2 - a_3} + b\,\frac{a_0}{a_2 - a_3} + d = 0,$$

was wegen

$${a_3}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$$

in

$$c\,\frac{{a_3}^2 - {a_2}^2}{(a_2 - a_3)^2} + a\,\frac{a_1}{a_2 - a_3} + b\,\frac{a_0}{a_2 - a_3} + d = 0$$

übergeht und dann schließlich

$$b\,a_0 + a\,a_1 + (d - c)\,a_2 - (c + d)\,a_3 = 0$$

ergibt. Das ist die Gleichung eines Zykels in Speerkoordinaten. Den A-Ketten des Quotientenringes der dualen Zahlen entsprechen die Zykel und den A-Kettenkonfigurationen nunmehr Zykelkonfigurationen. Als Folge des Satzes 5 können wir somit aussprechen:

Satz 8: Ist unter vier Zykeln eine beliebige zyklische Folge festgelegt und berühren vier gemeinsame Tangentenspeere der vier Paare

in ihr aufeinanderfolgender Zykel selbst einen Zykel, so ist das auch für die restlichen gemeinsamen Tangentenspeere der Fall.

Den zwei A-Kettenkonfigurationen entsprechen hier zwei Zykelfiguren von je acht Speeren und sechs (im allgemeinen Fall), bzw. acht (im speziellen) Zykeln. Es sind das die von E. Müller[5] angegebenen Konfigurationen.

[5] E. Müller-J. L. Krames, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2. Band: Zyklographie, 1929, S. 188, Satz 4.

Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen.

Von
Fritz Hohenberg, Graz.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 30. Januar 1950.)

Vollführt ein ebenes System eine gleichförmige Drehung um einen Punkt B und wird es zugleich samt B einer gleichförmigen Drehung um einen Punkt F unterworfen, so erhält man eine Trochoidenbewegung (Abrollen eines Kreises um B auf einem Kreis um F).

Im Raum tritt an die Stelle der Drehung die Schraubung. *Es liegt daher nahe, die kontinuierliche Bewegung zu betrachten, die durch Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen entsteht. Die Bahnkurven dieser Bewegung mögen Helikoiden*[1] *heißen und die Bewegung danach Helikoidenbewegung genannt werden.* Als Polflächen dieser Bewegung ergeben sich i. a. Strahlschraubflächen.

Die Betrachtung dieser Bewegung läßt sich u. a. damit rechtfertigen, daß sie eine Reihe bekannter Bewegungen als Sonderfälle enthält, z. B. die ebene und die sphärische Trochoidenbewegung, die Relativbewegung zweier Hyperboloidräder gegeneinander usw.

Die Zusammensetzung von mehr als zwei gleichförmigen Schraubungen führt zu komplizierteren Bahnkurven[2], die in einem späteren Aufsatz behandelt werden sollen.

1. Berechnung der Helikoiden.

Gegeben seien die Schraubachsen b und f, in der Anfangslage habe b die Lage b_0 (Abb. 1). Ein Raumpunkt P_0 wird zuerst der Schraubung

[1] Mit dem Namen „Helikoid" ist früher gelegentlich auch eine Strahlschraubfläche bezeichnet worden, siehe z. B. Th. Schmid, Über Berührungskurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide, Sitz.-Ber. Ak. Wiss. Wien, 1890, IIa, 99, S. 952–966.

[2] Sie sind Verallgemeinerungen der „höheren Radlinien", die *W. Wunderlich*, Österreichisches Ingenieurarchiv I, Wien 1947, S. 277–296 untersucht hat.

$b_0\,(\omega, k)$ (d. h. Schraubachse b_0, Winkelgeschwindigkeit ω, Steiggeschwindigkeit k) unterworfen und möge dadurch in der Zeit t in die Lage P_b kommen. In derselben Zeit t möge P_b samt b_0 durch die Schraubung $(f\,\Omega, K)$ in die Lage P_t, bzw. b_t übergehen. Die aus den Schraubungen $b\,(\omega, k)$ und $f\,(\Omega, K)$ zusammengesetzte Helikoidenbewegung $P_0 \longrightarrow P_t$ läßt sich mechanisch verwirklichen, wenn der Raumpunkt P_0 (oder irgend ein Körper) in der Anfangslage mit einer Schraube mit der Achse b_0 fest verbunden ist und die zugehörige Schraubenmutter mit einer anderen Schraubenmutter starr verbunden ist, die sich längs einer raumfesten Schraube mit der Achse f verschraubt (Abb. 1).

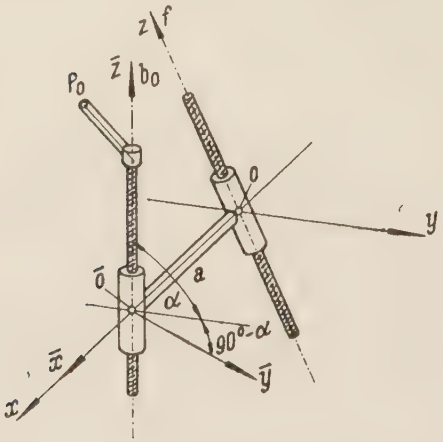

Abb. 1.
Raumfestes Koordinatensystem $O\,(x, y, z)$
Bewegliches Koordinatensystem $\bar{O}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Wir führen ein raumfestes kartesisches Rechtskoordinatensystem (x, y, z) ein, in dem f die z-Achse ist und die x-Achse den kürzesten Abstand von b_0 und f trägt (Abb. 1), ferner ein zweites System $(\bar{x}, \bar{y}, z)$, dessen $\bar{z}$-Achse mit b_0 und dessen $\bar{x}$-Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Die Ursprünge seien O und $\bar{O}$, $a = O\bar{O}$ sei der kürzeste Abstand von b und f; b möge unter dem Winkel α gegen die $[x, y]$-Ebene geneigt sein. Dann ist

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x - a,\ \bar{y} = y\sin\alpha - z\cos\alpha,\ \bar{z} = y\cos\alpha + z\sin\alpha,\\ &x = \bar{x} + a,\ y = \bar{y}\sin\alpha + \bar{z}\cos\alpha,\ z = -\bar{y}\cos\alpha + \bar{z}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &\cos\alpha = \underline{\alpha},\ \sin\alpha = \overline{\alpha},\\ &\cos\omega t = \underline{\omega},\ \sin\omega t = \overline{\omega},\ \cos\Omega t = \underline{\Omega},\ \sin\Omega t = \overline{\Omega}), \end{aligned} \tag{2}$$

so lauten die Schraubungen längs b_0, bzw. f

$$\bar{x}_b = \bar{x}_0\,\underline{\omega} - \bar{y}_0\,\overline{\omega},\ \bar{y}_b = \bar{x}_0\,\overline{\omega} + \bar{y}_0\,\underline{\omega},\ \bar{z}_b = \bar{z}_0 + k\,t, \tag{3}$$

$$x = x_b\,\underline{\Omega} - y_b\,\overline{\Omega},\ y = x_b\,\overline{\Omega} + y_b\,\underline{\Omega},\ z = z_b + K\,t. \tag{4}$$

Aus (1), (3) und (4) folgt, daß die vom Ausgangspunkt $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ beschriebene Helikoide (Parameter t) durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3$$

dargestellt wird, wo $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$ folgende Bedeutung haben:

1. $\mathfrak{x}_1$ ist der Ortsvektor der *sphärischen Trochoide*, die der Punkt $(x_0 - a, y_0, z_0)$ bei einer sphärischen Trochoidenbewegung im Bündel O mit denselben Werten ω und Ω beschreibt, wobei der feste Poldrehkegel die Achse f hat und die Achse des beweglichen Poldrehkegels parallel zu b_0 durch O verläuft. $\mathfrak{x}_1$ lautet in Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\underline{\omega}\,\underline{\Omega} - \overline{\omega}\,\overline{\Omega}\,\overline{\alpha})(x_0 - a) - (\overline{\omega}\,\underline{\Omega}\,\overline{\alpha} + \underline{\omega}\,\overline{\Omega}\,\overline{\alpha}^2 + \overline{\Omega}\,\underline{\alpha}^2)\, y_0 + \\ &\quad + (\overline{\omega}\,\underline{\Omega}\,\underline{\alpha} + \underline{\omega}\,\overline{\Omega}\,\overline{\alpha}\,\underline{\alpha} - \overline{\Omega}\,\overline{\alpha}\,\underline{\alpha})\, z_0 \\ y_1 &= (\underline{\omega}\,\overline{\Omega} + \overline{\omega}\,\underline{\Omega}\,\overline{\alpha})(x_0 - a) + (-\overline{\omega}\,\overline{\Omega}\,\overline{\alpha} + \underline{\omega}\,\underline{\Omega}\,\overline{\alpha}^2 + \underline{\Omega}\,\underline{\alpha}^2)\, y_0 + \\ &\quad + (\overline{\omega}\,\overline{\Omega}\,\underline{\alpha} - \underline{\omega}\,\underline{\Omega}\,\overline{\alpha}\,\underline{\alpha} + \underline{\Omega}\,\overline{\alpha}\,\underline{\alpha})\, z_0 \\ z_1 &= -\overline{\omega}\,\underline{\alpha}\,(x_0 - a) + (1 - \underline{\omega})\,\overline{\alpha}\,\alpha\, y_0 + (\underline{\omega}\,\underline{\alpha}^2 + \overline{\alpha}^2)\, z_0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

2. $\mathfrak{x}_2$ ist der Ortsvektor des „*Leitkreises*" in der $[x, y]$-Ebene (Mitte O, Radius a),

$$x_2 = \underline{\Omega}\, a,\ y_2 = \overline{\Omega}\, a,\ z_2 = 0. \quad (7)$$

3. $\mathfrak{x}_3$ ist der Ortsvektor der „*Leitspirale*"

$$x_3 = -k\,\overline{\Omega}\,\underline{\alpha}\, t,\ y_3 = k\,\underline{\Omega}\,\underline{\alpha}\, t,\ z_3 = (k\,\overline{\alpha} + K)\, t. \quad (8)$$

Ihr Normalriß auf die $[x, y]$-Ebene ist die Archimedische Spirale

$$\sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \frac{k}{\Omega}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y_3}{x_3} - \frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha. \quad (9a)$$

Die Leitspirale (8) liegt auf dem Drehkegel

$$(k\,\overline{\alpha} + K)^2\,(x_3^2 + y_3^2) - k^2\,\underline{\alpha}^2\, z_3^2 = 0. \quad (9b)$$

Leitkreis und Leitspirale hängen nur von den Konstanten der Helikoidenbewegung, nicht aber von der Wahl des Ausgangspunktes P_0 ab. Die von P_0 auslaufende Helikoide kann also so erhalten werden:

1. Parallelverschiebung von P_0 *um den Vektor* $(-a, 0, 0)$ *und konische Rollung im Bündel* O *wie oben, 2. Parallelverschiebung um* $\mathfrak{x}_2$, *3. Parallelverschiebung um* $\mathfrak{x}_3$.

Diese Erzeugung der Helikoiden durch Vektoraddition ist konstruktiv günstiger als die direkte Konstruktion durch Zusammensetzung zweier Schraubungen. Sie ist die räumliche Verallgemeinerung einer bekannten Erzeugung der ebenen Trochoiden: Rotieren in der Ebene zwei Ortsvektoren mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten, so beschreibt der

Endpunkt des Summenvektors eine ebene Trochoide[3]. Hier ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $k + K = 0$.

Die Kurven $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ usw. haben folgende Bedeutung:

1. $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ ist die Bahnkurve von P_0 bei der Bewegung, die sich durch Zusammensetzung der Drehungen um b_0 und f mit den Winkelgeschwindigkeiten ω und Ω ergibt. Diese Bewegung tritt bei den bekannten Hyperboloidrädern als Relativbewegung des einen gegen das andere Rad auf.

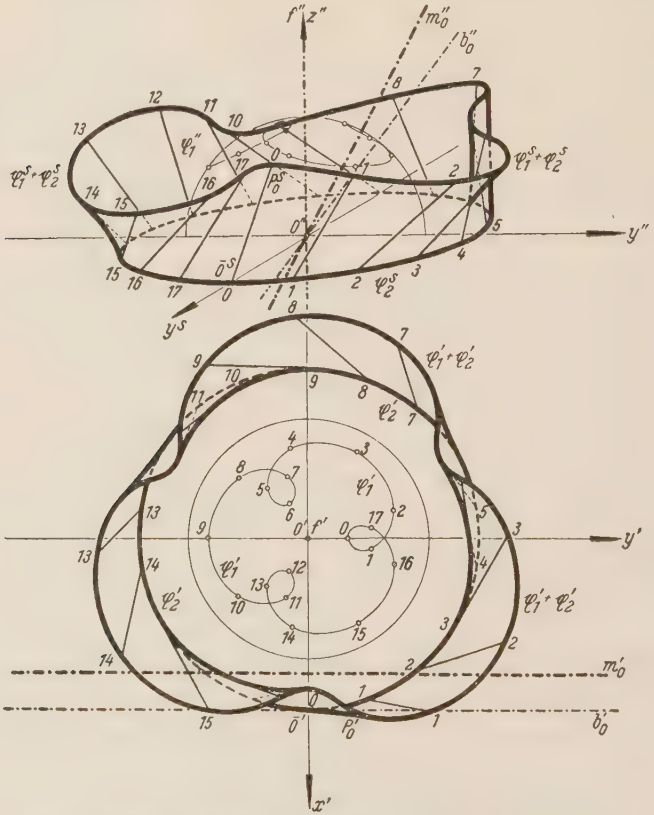

Abb. 2. Zusammensetzung der Drehungen $b\ (\omega, 0)$ und $f\ (\Omega, 0)$.

2. $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3$ ist die Bahnkurve von $(x_0 - a, y_0, z_0)$ bei der Helikoidenbewegung mit denselben Werten a, ω, Ω, k, K und derselben Achse f; anstelle von b_0 tritt jedoch die Parallele zu b_0, die durch O geht.

[3] *G. Bellermann*, Epicykloiden und Hypocykloiden, Diss. Jena 1867. Siehe auch *E. Pascal*, Repertorium d. höh. Math., Bd. II/1, Leipzig 1910, S. 466.

3. $\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3$ ist die Bahnkurve von $(a, 0, 0)$ bei der Zusammensetzung der Schraubungen $b\,(\omega, k)$ und $f\,(\Omega, K)$. Da $(a, 0, 0)$ auf b_0 liegt, ist diese Kurve von ω unabhängig.

In *Abb. 2* wurden unter der Annahme $a = 23$ mm, $\sin\alpha = 0.8$ die Drehungen mit $\omega = \frac{1}{3}\pi$/sec und $\Omega = \frac{1}{9}\pi$/sec zusammengesetzt. Es wurde der Grundriß auf die $[x, y]$-Ebene und der Aufriß auf die $[y, z]$-Ebene bestimmt und daraus ein Schrägriß konstruiert, bei dem die x-Achse unter 150^0 gegen die y-Achse geneigt und im Verhältnis $1 : 2$ verkürzt erscheint. Die Verbindung „gleichzeitiger" Punkte von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$ liefert den von der Strecke $[\bar{O}\ P_0]$ beschriebenen Streifen einer Strahlfläche.

In *Abb. 3* sind zwei Bahnkurven zur Helikoidenbewegung mit denselben Werten a, α, ω und Ω, jedoch $k = 1.5$ mm/sec und $K = 0.15$ mm/sec dargestellt und der Schrägriß des von der Strecke $[\bar{O}\ P_0]$ beschriebenen Streifens einer Strahlfläche konstruiert. Die Punkte in Abb. 2 und Abb. 3 sind mit ihren Zeitwerten beziffert.

Die Helikoide eines beliebigen Anfangspunktes nähert sich für $t \longrightarrow \infty$ derselben Fernkurve wie die Leitspirale, nämlich der Fernkurve des Drehkegels (9b). Abb. 3 läßt dieses Verhalten bereits erkennen.

Ist dagegen P_0 ein Fernpunkt, so folgt aus (5) und (6), daß seine Bahnkurve aus einer sphärischen Trochoide (6) durch Projektion aus O auf die Fernebene entsteht.

2. Einige Sonderfälle.

1. Gewöhnliche Schraublinien ($\omega = k = 0$), insbesondere Kreise ($\omega = k = K = 0$) und Geraden ($\omega = k = \Omega = 0$) sind spezielle Helikoiden.

2. $\alpha = 0$, $k = \Omega = 0$ ergibt als Bahnkurven ebene Trochoiden.

3. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k + K = 0$ ergibt $\mathfrak{x}_3 \equiv 0$, die Bahnkurven sind ebene Epi- oder Hypotrochoiden.

4. Für $a = 0$ und $k = K = 0$ sind die Bahnkurven sphärische Trochoiden.

5. Für $a \neq 0$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $k = K = 0$ ergeben sich die Bahnkurven der Relativbewegung zweier Hyperboloidräder gegeneinander.

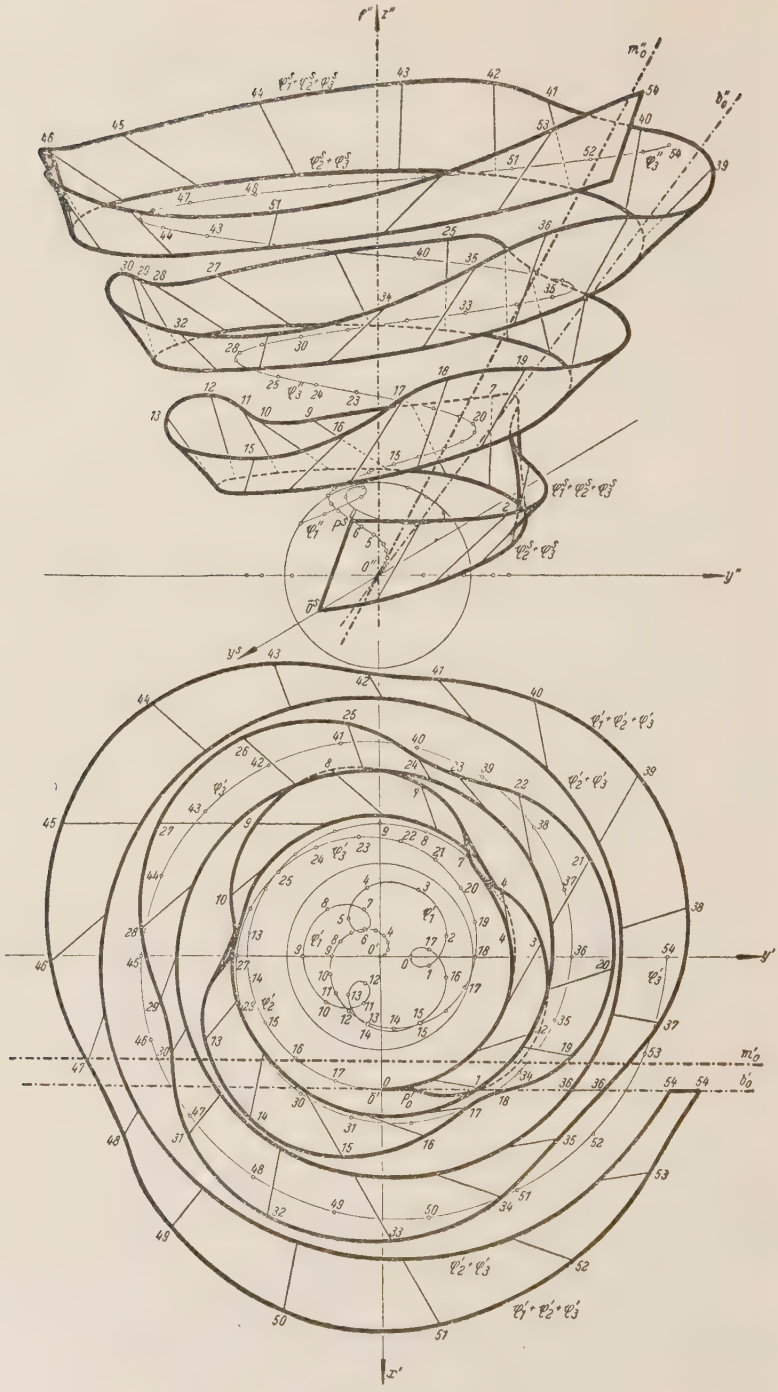

Abb. 3. Zusammensetzung der Schraubungen $b\ (\omega, k)$ und $f\ (\Omega, K)$.

In den Fällen 3, 4 und 5 ist die Bewegung periodisch, wenn das Verhältnis $\omega : \Omega$ rational ist. Die Helikoiden sind dann geschlossene algebraische (u. zw. rationale) Raumkurven.

6. Im Fall $a = \alpha = \omega = 0$, jedoch $\Omega\, k\, K \neq 0$ beschreiben die Punkte, die in der Anfangslage in der Ebene $[b_0 f]$ liegen, sogenannte konische Schraublinien. Diese liegen auf Drehkegeln mit der Achse f und dem halben Öffnungswinkel arc tg $\frac{k}{K}$. Die übrigen Raumpunkte durchlaufen analoge Kurven, die auf einschaligen Drehhyperboloiden liegen.

7. Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\omega + \Omega = 0$ ist

$$x = (x_0 - a) + a\,\underline{\Omega},\ y = y_0 + a\,\overline{\Omega},\ z = z_0 + (k + K)\,t,$$

d. h. die Helikoiden sind kongruente, gleichgestellte gewöhnliche Schraublinien auf Drehzylindern, deren Achsen zu f parallel laufen und deren Radius a ist. Der Raum erfährt die krumme Schiebung längs dieser Schraublinien.

3. Flächen, die ∞^2 Helikoiden enthalten.

Auf einem Drehzylinder liegen Bahnkurven von ∞^1 einfachen Schraubungen, insgesamt ∞^2 Schraublinien. Flächen mit ∞^2 Helikoiden erhält man, wenn man bei festgewählten Achsen b_0 und f einen der Werte ω, k variiert, oder wenn man von einer der beiden Schraubungen $b\,(\omega, k)$, bzw. $f\,(\Omega, K)$ nur den Parameter $k : \omega$, bzw. $K : \Omega$ vorgibt[4].

1. a) ω sei veränderlich, dagegen Ω, k und K fest. Ein Ausgangspunkt P_0 beschreibt bei den Schraubungen $b_0\,(\omega, k)$ zunächst ∞^1 Schraublinien auf einem Drehzylinder mit der Achse b_0, wobei „gleichzeitige" Punkte P_b auf einem Parallelkreis dieses Zylinders liegen. Ist daher p_0 der Kreis, der durch Drehung von P_0 um b_0 entsteht, so ergibt sich *eine zyklische Fläche mit* ∞^2 *Helikoiden*, wenn man p_0 einer Helikoidenbewegung mit den gewählten Werten Ω, k und K und mit beliebigem ω unterwirft. Von jedem Punkt von p_0 geht — entsprechend den ∞^1 Werten ω — ein Büschel von ∞^1 Helikoiden auf der Fläche aus.

[4] Läßt man einen der Werte a, α, ω, k, Ω, K in anderer Weise variieren, so entstehen Flächen, die nur ∞^1 Helikoiden enthalten.

Ist $k = K = 0$, so entsteht die zyklische Fläche durch Drehung von p_0 um f und ist algebraisch von der 4. Ordnung (für $a = 0$ ein Torus).

b) k sei veränderlich, dagegen ω, Ω und K fest. Ein Ausgangspunkt P_0 beschreibt bei den Schraubungen $b_0\,(\omega, k)$ zunächst ∞^1 Schraublinien auf einem Drehzylinder mit der Achse b_0, wobei „gleichzeitige" Punkte P_b auf einer Erzeugenden dieses Zylinders liegen. Ist daher e_0 die durch P_0 gehende Parallele zu b_0, so ergibt sich *eine Strahlfläche mit* ∞^2 *Helikoiden*, wenn man e_0 einer Helikoidenbewegung mit den gewählten Werten ω, Ω und K und mit beliebigem k unterwirft. Von jedem Punkt von e_0 gehen — entsprechend den ∞^1 Werten k — ∞^1 Helikoiden aus.

Für $\omega = 0$ ist diese Fläche eine *Strahlschraubfläche*, insbesondere für $K = 0$ ein *einschaliges Drehhyperboloid.*

Liegt P_0 auf b_0, so ist diese Fläche auch für $\omega \neq 0$ eine *Strahlschraubfläche*, die aus b_0 durch die Schraubung $f\,(\Omega, K)$ entsteht.

2. Nun seien ω und k veränderlich, jedoch der Parameter $k : \omega$ fest, ebenso Ω und K fest. Bei den ∞^1 Schraubungen längs b_0 mit dem Parameter $k : \omega$ durchläuft P_0 eine bestimmte Schraublinie s_0 mit beliebiger (konstanter) Geschwindigkeit. *Bei der Schraubung* $f\,(\Omega, K)$ *beschreibt die zur Schraubung* $b\,(\omega, k)$ *gehörige Schraublinie* s_0 *eine Fläche, die* ∞^2 *Helikoiden enthält.* Von jedem Punkt von s_0 gehen ∞^1 Helikoiden aus, und zwar je eine zu jedem Wertepaar ω, k, für das $k : \omega$ den vorgegebenen Wert hat.

Sind anderseits ω und k fest, Ω und K veränderlich, der Parameter $K : \Omega$ jedoch fest, so ergibt sich dieselbe Fläche mit ∞^2 Helikoiden: die mit fester Geschwindigkeit durchlaufene Schraublinie s_0 wird mit beliebiger (konstanter) Geschwindigkeit längs der zu $f\,(\Omega, K)$ gehörigen Schraublinien verschraubt. Dabei vermag jeder Punkt von s_0 (je nach den Werten Ω und K) ∞^1 verschiedene Helikoiden zu durchlaufen.

In den Sonderfällen $k : \omega = 0$, bzw. ∞, also $k = 0$, bzw. $\omega = 0$ ergeben sich diese Flächen auch aus 1a, bzw. 1b, wenn man dort $k = 0$, bzw. $\omega = 0$ setzt.

Im Sonderfall, daß b und f zueinander parallel sind, hat schon L. Burmester[5] diese Fläche gefunden; E. Müller[6] hat diese spezielle

[5] *L. Burmester*, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung, Z. Math. Phys. 33 (1888), S. 337—348.

[6] *E.* Müller, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht, Sitz.-Ber. Ak. d. Wiss. Wien 1909. IIa, S. 1—11.

Fläche als Schiebfläche erkannt. Hier erweist sie sich als Träger von ∞^2 Helikoiden.

4. Der momentane Geschwindigkeitszustand.

Differentiert man (5) bis (8) nach t und setzt $t = 0$, so folgen die Geschwindigkeitskomponenten von $P_0(x_0, y_0, z_0)$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -(\omega\,\bar{\alpha} + \Omega)\,y_0 + \omega\,\underline{\alpha}\,z_0 \\ \dot{y}_0 &= (\omega\,\bar{\alpha} + \Omega)\,(x_0 - a) + \Omega\,a + \underline{\alpha}\,k \\ \dot{z}_0 &= -\omega\,\underline{\alpha}\,(x_0 - a) + \bar{\alpha}\,k + K. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Geschwindigkeit setzt sich zusammen aus der *Führungsgeschwindigkeit*

$$\dot{x}_{0f} = -\Omega\,y_0,\ \dot{y}_{0f} = \Omega\,x_0,\ \dot{z}_{0f} = K \quad (10a)$$

und der *Relativgeschwindigkeit*

$$\dot{\bar{x}}_0 = -\omega\,\bar{y}_0,\ \dot{\bar{y}}_0 = \omega\,\bar{x}_0,\ \dot{\bar{z}}_0 = k \quad (10b)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{0r} &= -\omega\,\bar{\alpha}\,y_0 + \omega\,\underline{\alpha}\,z_0 \\ \dot{y}_{0r} &= \omega\,\bar{\alpha}\,(x_0 - a) + k\,\underline{\alpha} \\ \dot{z}_{0r} &= -\omega\,\underline{\alpha}\,(x_0 - a) + k\,\bar{\alpha} \end{aligned}\right\}$$

(Alle für $t = 0$ geltenden Formeln gelten auch für $t \neq 0$, wenn man das (x, y, z)-System längs f so verschraubt, daß die x-Achse das Gemeinlot zwischen f und der Lage von b im betrachteten Zeitpunkt ist).

Die Helikoidenbewegung ist hinsichtlich ihrer Geschwindigkeitsverteilung durch eine *Momentanschraubung* ersetzbar, deren Achse m_0 für $t = 0$ offenbar die x-Achse in einem Punkt $(a_0, 0, 0)$ senkrecht schneidet und gegen die $[x, y]$-Ebene unter einem Winkel α_0 geneigt ist. ω_0 und k_0 seien Winkel- und Steiggeschwindigkeit der Momentanschraubung. Die Geschwindigkeitsverteilung der Helikoidenbewegung läßt sich durch die Konstanten der Momentanschraubung ausdrücken, indem man in (10) $\Omega = K = 0$ setzt und a, α, ω, k, bzw. durch a_0, α_0, ω_0, k_0 ersetzt, d. h.

$$\dot{x}_0 = -\omega_0\,\bar{\alpha}_0\,y_0 + \omega_0\,\underline{\alpha}_0\,z_0,\ \dot{y}_0 = \omega_0\,\bar{\alpha}_0\,(x_0 - a_0) + \underline{\alpha}_0\,k_0,$$
$$\dot{z}_0 = -\omega_0\,\underline{\alpha}_0\,(x_0 - a_0) + \bar{\alpha}_0\,k_0. \quad (11)$$

Setzt man für einige spezielle Punkte die Geschwindigkeitskomponenten, die sich aus (10) und (11) ergeben, einander gleich, so ergeben sich Gleichungen für a_0, α_0, ω_0, k_0 und es folgt

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_0^2 = \omega^2 + 2\,\omega\,\Omega\,\overline{\alpha} + \Omega^2 = \omega\,(\omega + \Omega\,\overline{\alpha}) + \Omega\,(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega),\\
&\frac{k_0}{\omega_0} = \frac{k\,(\omega + \Omega\,\overline{\alpha}) + K\,(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega) + \omega\,\Omega\,a\,\underline{\alpha}}{\omega^2 + 2\,\omega\,\Omega\,\overline{\alpha} + \Omega^2},\\
&a_0 = \frac{(\omega + \Omega\,\overline{\alpha})\,\omega\,a + (K\omega - k\Omega)\,\underline{\alpha}}{\omega^2 + 2\,\omega\,\Omega\,\overline{\alpha} + \Omega^2},\quad a - a_0 = \frac{(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega)\,\Omega a + (k\Omega - K\omega)\,\underline{\alpha}}{\omega^2 + 2\,\omega\,\Omega\,\overline{\alpha} + \Omega^2},\\
&\operatorname{tg}\alpha_0 = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\Omega}{\omega\cos\alpha},\quad \overline{\alpha}_0 = \frac{\omega\,\overline{\alpha} + \Omega}{\omega_0},\quad \underline{\alpha}_0 = \frac{\omega\,\underline{\alpha}}{\omega_0}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

In der Literatur finden sich nur Sonderfälle dieser Formeln, nämlich für die in 2. genannten speziellen Bewegungen.

Trägt man ω und Ω in den Richtungen b_0, bzw. f als Ortsvektoren auf, so hat der Summenvektor die Richtung von m_0 und die Länge ω_0.

Führt man ein neues Rechtskoordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen ξ-Achse die x-Achse und dessen ζ-Achse die Momentanachse m_0 ist,

$$\begin{aligned}
x &= \xi + a_0,\ y = \eta\,\overline{\alpha}_0 + \zeta\,\alpha_0,\ z = -\eta\,\underline{\alpha}_0 + \zeta\,\overline{\alpha}_0,\\
\xi &= x - a_0,\ \eta = y\,\overline{\alpha}_0 - z\,\underline{\alpha}_0,\ \zeta = \quad y\,\underline{\alpha}_0 + z\,\overline{\alpha}_0,
\end{aligned} \quad (13)$$

so ergibt sich aus (10) die Geschwindigkeitsverteilung im (ξ, η, ζ)-System

$$\dot{\xi}_0 = -\omega_0\,\eta_0,\ \dot{\eta}_0 = \omega_0\,\xi_0,\ \dot{\zeta}_0 = k_0. \quad (14)$$

Daraus folgt auch die Konstruktion von Tangenten der Helikoiden.

Unterwirft man m_0 den einfachen Schraubungen $b_0\,(\omega, k)$, bzw. $f\,(\Omega, K)$, so ergibt sich die bewegliche Polfläche φ_0 (in der Anfangslage), bzw. die feste Polfläche Φ der Helikoidenbewegung. *Die Polflächen sind also i. a. schiefe offene Strahlschraubflächen.*

Es treten *zahlreiche Sonderfälle* auf, z. B.:

1. Φ, bzw. φ ist eine geschlossene Strahlschraubfläche (oder ein Sonderfall davon — analog in den folgenden Fällen), wenn $a_0 = 0$, bzw. $a_0 = a$.

2. Φ, bzw. φ ist eine gerade Strahlschraubfläche, wenn $m_0 \perp f$, bzw. $m_0 \perp b_0$, d. h. wenn $\omega\,\overline{\alpha} + \Omega = 0$, bzw. $\omega + \Omega\,\overline{\alpha} = 0$ ist.

3. Φ, bzw. φ ist eine Wendelfläche, wenn $a_0 = 0$ und $m_0 \perp f$, bzw. $a_0 = a$ und $m_0 \perp b_0$ ist.

4. Φ, bzw. φ ist ein einschaliges Drehhyperboloid, wenn $K = 0$, bzw. $k = 0$ ist. Für Hyperboloidräder ist $K = k = 0$.

5. Auch kann eine oder beide Polflächen ein Drehkegel oder ein Drehzylinder sein oder in eine Ebene ausarten.

6. Ist $\omega_0 = 0$, so ist die Bewegung eine krumme Schiebung. Im Reellen kann dies nur eintreten, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\omega + \Omega = 0$ ist (2. Sonderfall 7).

7. Ist $k_0 = 0$, so rollt (statt schrotet)[7] φ auf Φ. Die Bahnkurven der Punkte einer Erzeugenden von φ haben dort, wo die Erzeugende Momentanachse wird, Spitzen (z. B. die Spitzen der ebenen und sphärischen Zykloiden). Für $k_0 \neq 0$ weisen die Helikoiden keine Spitzen auf.

8. Beide Polflächen sind Schraubtorsen (oder ein Sonderfall davon), wenn m_0 eine Tangente der Schraubung $f(\Omega, K)$ ist, d. h. wenn

$$(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega)\,(\omega + \Omega\,\overline{\alpha})\,\omega\,\Omega\,a = K\,\omega^2\,\underline{\alpha}\,(\omega + \Omega\,\overline{\alpha}) + k\,\Omega^2\,\underline{\alpha}\,(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega)$$

(Diese Bedingung ist natürlich symmetrisch in den Konstanten beider Schraubungen, da Φ und φ in zusammengehörigen Erzeugenden denselben Drall haben). Die Schraubtorsen rollen aufeinander[7], wenn

$$K\,(\omega + \Omega\,\overline{\alpha}) + k\,(\omega\,\overline{\alpha} + \Omega) = 0.$$

5. Der momentane Beschleunigungszustand.

Differentiert man (5) bis (8) zweimal nach t und setzt $t = 0$, so folgen die Beschleunigungskomponenten von $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -\omega_0^2\,(x_0 - a) && -\Omega^2\,a - 2\Omega\,\underline{\alpha}\,k \\ \ddot{y}_0 &= -(\omega_0^2 - \omega^2\,\underline{\alpha}^2)\,y_0 + \omega\,\underline{\alpha}\,(\omega\,\overline{\alpha} + 2\,\Omega)\,z_0 \\ \ddot{z}_0 &= \omega^2\,\overline{\alpha}\,\underline{\alpha}\,y_0 && -\omega^2\,\underline{\alpha}^2\,z_0 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Diese Beschleunigung setzt sich zusammen aus der *Führungsbeschleunigung*

$$\ddot{x}_{0f} = -\Omega^2\,x_0,\ \ddot{y}_{0f} = -\Omega^2\,y_0,\ \ddot{z}_{0f} = 0, \quad (15a)$$

aus der *Relativbeschleunigung*

$$\ddot{\bar{x}}_0 = -\omega^2\,\bar{x}_0,\ \ddot{\bar{y}}_0 = -\omega^2\,\bar{y}_0,\ \ddot{\bar{z}}_0 = 0, \quad (15b)$$

$$\ddot{x}_{0r} = -\omega^2\,(x_0 - a),\ \ddot{y}_{0r} = -\omega^2\,(y_0\,\overline{\alpha} - z_0\,\underline{\alpha})\,\overline{\alpha},\ \ddot{z}_{0r} = \omega^2\,(y_0\,\overline{\alpha} - z_0\,\underline{\alpha})\,\underline{\alpha}$$

und aus der *Coriolisbeschleunigung*

---

[7] Zwei sehr spezielle Fälle dieser Art treten als Relativbewegung bei zwei Getrieben auf, die in *L. Beyer*, Technische Kinematik, Leipzig 1931, S. 377 besprochen sind:

a) Zwei Schraubtorsen mit schneidenden Achsen als Polflächen reiner Rollung.

b) Eine geschlossene schiefe Strahlschraubfläche in rollender Paarung mit einem einschaligen Drehhyperboloid, deren beider Achsen sich senkrecht schneiden.

$$\ddot{x}_{0c} = -2\Omega\,[\omega\,\bar{\alpha}\,(x_0 - a) + k\,\underline{\alpha}],\ \ddot{y}_{0c} = -2\Omega\,[\omega\,\bar{\alpha}\,y_0 - \omega\,\underline{\alpha}\,z_0],\ \ddot{z}_{0c} = 0. \tag{15c}$$

Die Coriolisbeschleunigung verschwindet i. a. für die Punkte einer zu b_0 parallelen Geraden, nämlich $x_0 = a - \dfrac{k}{\omega}\cot\alpha$, $z_0 = y_0 \operatorname{tg}\alpha$.

Im (ξ, η, ζ)-System lautet die Beschleunigung

$$\ddot{\xi}_0 = -\omega_0^2\,(\xi - \xi_{00}),\ \ddot{\eta}_0 = -\omega_0^2\,\eta_0 + \omega\,\Omega\,\underline{\alpha}\,\zeta_0,\ \ddot{\zeta}_0 = -\omega\,\Omega\,\underline{\alpha}\,\eta_0, \tag{16}$$

wo der Punkt mit $\xi = \xi_{00} = [\omega\,\Omega\,a\,\bar{\alpha} - (\omega\,K + \Omega\,k)\,\underline{\alpha}]\colon \omega_0^2,\ \eta = \zeta = 0$ der Beschleunigungspol ist (Beschleunigung 0). Er ist i. a. eindeutig bestimmt. Wenn aber $\Omega = 0$ ist, ist jeder Punkt von b_0 Beschleunigungspol. Ist endlich $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ und $\omega + \Omega = 0$, so liegt eine krumme Schiebung vor und jeder Raumpunkt ist Beschleunigungspol.

Im allgemeinen Fall steht der Beschleunigungsvektor nur für die Punkte der $[\xi_0, \zeta_0]$-Ebene auf der Momentanachse senkrecht.

Ein Vergleich von (16) mit den analogen Formeln für eine allgemeine Raumbewegung[8] zeigt, daß *eine allgemeine Raumbewegung in jedem Zeitpunkt, bzw. in einem einzelnen Zeitpunkt in zweiter Näherung durch eine Helikoidenbewegung ersetzt werden kann, wenn ihre Winkel- und ihre Steiggeschwindigkeit dem Betrage nach konstant, bzw. im betrachteten Zeitpunkt stationär sind.* Trifft dies zu, so gibt es i. a. nicht nur eine, sondern unendlich viele solche Helikoidenbewegungen.

Zur Berechnung der Torsion usw. der Helikoiden seien noch die dritten Ableitungen angeführt:

$$\left.\begin{aligned}
\dddot{x}_0 &= (\omega^3\bar{\alpha} + 3\omega^2\Omega\bar{\alpha}^2 + 3\omega\Omega^2\bar{\alpha} + \Omega^3)\,y_0 - (\omega^3\,\underline{\alpha} + 3\omega^2\Omega\bar{\alpha}\underline{\alpha} + 3\omega\Omega^2\underline{\alpha})\,z_0 \\
\dddot{y}_0 &= -(\omega^3\bar{\alpha} + 3\omega^2\Omega + 3\omega\Omega^2\bar{\alpha} + \Omega^3)\,(x_0 - a) - \Omega^3 a - 3\Omega^2\underline{\alpha}\,k \\
\dddot{z}_0 &= \omega^3\,\underline{\alpha}\,(x_0 - a)
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dddot{\xi}_0 &= \omega_0\,(\omega_0^2 + \Omega^2\,\underline{\alpha}_0^2)\,\eta_0 - \omega_0\,\Omega\,\underline{\alpha}_0\,(\omega_0 + \Omega\,\bar{\alpha}_0)\,\zeta_0 \\
\dddot{\eta}_0 &= -\omega_0\,(\omega_0^2 + \Omega^2\,\underline{\alpha}_0^2)\,(\xi_0 + a_0 - a) - \Omega^2\,\bar{\alpha}_0\,(a\,\Omega + 3\,k\,\underline{\alpha}) \\
\dddot{\zeta}_0 &= -\omega\,\Omega\,\underline{\alpha}\,(2\,\omega_0 - \Omega\,\bar{\alpha}_0)\,(\xi_0 + a_0 - a) - \Omega^2\,\underline{\alpha}_0\,(a\,\Omega + 3\,k\,\underline{\alpha})
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

6. Die Bewegung einer Geraden.

Eine Gerade e, die zur Zeit $t = 0$ die Lage e_0 haben möge, beschreibt bei der Helikoidenbewegung eine Strahlfläche (siehe z. B. Abb. 2 und 3). Die Fernkurve der Fläche entsteht durch Projektion einer sphärischen Trochoide $\mathfrak{x}_1$ aus O auf die Fernebene.

[8] Z. B. R. Beyer, Technische Kinematik, Leipzig 1931, S. 399.

Für diese Flächen lassen sich Umrißkurven bei Parallelprojektion (bzw. Eigenschattengrenzen bei Parallelbeleuchtung) ähnlich wie bei einfachen Strahlschraubflächen ermitteln. Wir wählen in dem beweglichen System, das nur der Schraubung $f(\Omega, K)$ unterworfen ist, eine zu b normale Ebene β als Zeichenebene und einen Punkt B, der auf b im Abstand $k:\omega$ von β liegt, als Zentrum eines Hilfsrisses. Für einen Beobachter in diesem beweglichen System vollführt e die Schraubenbewegung $b(\omega, k)$ und befinde sich zur Zeit t in der Lage e_t. Der Fluchtpunkt E_u^c von e_t im Hilfsriß aus B auf β beschreibt einen Kreis mit der Mitte auf b. Der Fluchtpunkt T_u^c der Schraubtangente durchläuft mit derselben Winkelgeschwindigkeit einen dazu konzentrischen Kreis.

Dem raumfesten System gehören f und ein gewählter Fernpunkt U an, der als Auge oder Lichtquelle aufgefaßt werden kann. Relativ zum System $(b, B, \beta, \ldots)$ vollführt das raumfeste System die Schraubung $f(-\Omega, -K)$. Man erhält daher die Fluchtpunkte U_u^c der durch U laufenden Sehstrahlen als Schnittpunkte von β mit den Erzeugenden eines Drehkegels mit der Spitze B und der Achsenrichtung f, dessen Erzeugenden mit der Achse den Winkel $U f$ einschließen.

Geht man von den Fluchtpunkten zu den Drehfluchtpunkten über, so kann man auf jeder Erzeugenden e_t in gewohnter Weise[9] im beweglichen System den Umrißpunkt konstruieren und von dort ins raumfeste System übertragen. Der Unterschied gegenüber der herkömmlichen Konstruktion liegt nur darin, daß hier die Drehflucht des Sehstrahls nicht mehr ein fester Punkt ist, sondern auf einem Kegelschnitt periodisch mit der Frequenz $\Omega:2\pi$ wandert.

Zur Berechnung der Ableitungsgleichungen sei e_0 im (ξ, η, ζ)-System durch die Punkte $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ und $Q_0(\xi_0 + \xi_0^0, \eta_0 + \eta_0^0, \zeta_0 + \zeta_0^0)$ gegeben. Wendet man (14) und (16) auf P_0 und Q_0 an, so folgt

$$\dot{\xi}_0^0 = -\omega_0 \eta_0^0, \dot{\eta}_0^0 = \omega_0 \xi_0^0, \dot{\zeta}_0^0 = 0, \tag{19}$$

$$\ddot{\xi}_0^0 = -\omega_0^2 \xi_0^0, \ddot{\eta}_0^0 = -\omega_0^2 \eta_0^0 + \omega \Omega \underline{\alpha} \zeta_0^0, \ddot{\zeta}_0^0 = -\omega \Omega \underline{\alpha} \eta_0^0. \tag{20}$$

Dies genügt, um von der erzeugten Strahlfläche den Drall in einer Erzeugenden usw. zu berechnen.

---

[9] Vgl. etwa E. Müller-E. Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 5. Aufl., Wien 1948, S. 199—204.

7. Die Bewegung einer Ebene.

Eine Ebene ε, die zur Zeit $t = 0$ die Lage ε_0 haben möge, umhüllt bei der Helikoidenbewegung eine Torse. Die zur Lage ε_0 gehörige Erzeugende der Torse ist die in ε_0 liegende Schraubtangente der Momentanschraubung (14). Sie ist eine Fallinie von ε_0 bezüglich der $[\xi_0, \eta_0]$-Ebene. Die Umrißerzeugenden einer solchen Torse bei Parallelprojektion lassen sich auf ebensolche Weise wie in 6. konstruieren.

Hat ε im (ξ, η, ζ)-System die Gleichung

$$\lambda(t)\,\xi + \mu(t)\,\eta + \nu(t)\,\zeta + 1 = 0, \tag{21}$$

so müssen dieser Gleichung die Punkte $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ jeder Helikoide genügen, deren Anfangspunkt $(t = 0)$ auf ε_0 liegt. Setzt man $\lambda(0) = \lambda_0$, $\xi(0) = \xi_0$ usw., so muß also

$$\lambda(t)\,\xi(t) + \mu(t)\,\eta(t) + \nu(t)\,\zeta(t) + 1 \equiv 0 \tag{21a}$$

sein, wenn $\lambda_0\,\xi_0 + \mu_0\,\eta_0 + \nu_0\,\zeta_0 + 1 = 0$ ist. Differentiert man (21a) nach t und setzt die Schnittpunkte von ε_0 mit der ξ-, η- und ζ-Achse ein, so folgt[10]

$$\dot{\lambda}_0 = -\omega_0\,\mu_0 + k_0\,\lambda_0\,\nu_0,\quad \dot{\mu}_0 = \omega_0\,\lambda_0 + k_0\,\mu_0\,\nu_0,\quad \dot{\nu}_0 = k_0\,\nu_0^2, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\lambda}_0 &= -\omega_0^2\,\lambda_0 + \omega_0^2\,\xi_{00}\,\lambda_0^2 && - 2\,\omega_0\,k_0\,\mu_0\,\nu_0 + 2\,k_0^2\,\lambda_0\,\nu_0^2\\
\ddot{\mu}_0 &= -\omega_0^2\,\mu_0 + \omega_0^2\,\xi_{00}\,\lambda_0\,\mu_0 + \omega\,\Omega\,\underline{\alpha}\,\nu_0 + 2\,\omega_0\,k_0\,\lambda_0\,\nu_0 + 2\,k_0^2\,\mu_0\,\nu_0^2\\
\ddot{\nu}_0 &= \omega_0^2\,\xi_{00}\,\lambda_0\,\nu_0 - \omega\,\Omega\,\underline{\alpha}\,\mu_0 && + 2\,k_0^2\,\nu_0^3
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Damit läßt sich die Gratlinie usw. der Torse berechnen.

---

[10] Solche Ableitungsgleichungen für Ebenenkoordinaten werden in der Literatur auch bei anderen Bewegungen nicht angegeben. Es scheint überhaupt, daß der Gedanke F. Wittenbauers, der Kinematik des Punktes in der Ebene eine Kinematik des Strahls in der Ebene zur Seite zu stellen („Kinematik des Strahls", Graz 1883), nicht auf die räumliche Kinematik ausgedehnt worden ist.

Stetige Vermittlung der Korrelationen.

Von
Louis Locher-Ernst, Winterthur.

(Eingelangt am 18. Februar 1950.)

1. Einleitung.

Eine Korrelation in der Ebene kann aufgefaßt werden als eine Abbildung der Mannigfaltigkeit der Linienelemente auf sich. Hierbei gehen die Linienelemente eines Punktes in diejenigen einer Geraden, die Linienelemente einer Geraden in diejenigen eines Punktes über. Es stellt sich die Frage, wie diese Abbildung durch eine kontinuierliche Transformation vermittelt werden kann. Im Raume handelt es sich darum, die mit einer Korrelation gegebene Abbildung der Mannigfaltigkeit der Flächenelemente auf sich durch eine kontinuierliche Transformation zu bewirken. Für den besonderen Fall der Polarität findet sich bei *Lie*[1] eine Bemerkung zu diesem Problem. Im folgenden gebe ich eine naheliegende Lösung, die für den Sonderfall der Polarität einen besonders anschaulichen Zugang zu den nichteuklidischen Geometrien darstellt, indem sie das Huygens'sche Prinzip verallgemeinert.

2. Bezeichnungen.

Die Korrelation sei gegeben durch die Gleichung

$$(x'\ x) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x'_i\, x_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

wobei die bilineare Form $(x'\ x)$ im allgemeinen unsymmetrisch ist und die Größen x'_i, x_k homogene Punktkoordinaten darstellen. Für die Ebene ist $n = 3$, für den Raum $n = 4$. Wir sprechen im folgenden der Kürze wegen die Ergebnisse für $n = 3$ aus, geben aber die Formeln für ein allgemeines n.

---

[1] *S. Lie:* Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie. Ber. Verh. Ges. d. Wiss., Leipzig, Bd. 47, 1895, S. 501.

Die Korrelation (1) ordnet dem Punkt x die Gerade u', der Geraden u den Punkt x' zu. Die Koordinaten u_i' der Geraden u' und die Koordinaten x_i' des Punktes x' sind gegeben durch

$$\varrho\, u_i' = \sum_k a_{ik}\, x_k, \qquad \sigma\, x_i' = \sum_k A_{ik}\, u_k, \tag{2}$$

wobei die A_{ik} die Adjunkten der a_{ik} sind.

Mit x^*u bezeichnen wir das Linienelement (Flächenelement), das durch den Punkt x und die Gerade u (Ebene u) bestimmt ist. Es gilt also die Incidenzbedingung $\Sigma\, u_i\, x_i = 0$. Die Korrelation (1) bildet die Elemente x^*u auf die Elemente x'^*u' ab. Die *Kernkurve* der Korrelation, d. h. die Kurve, deren Punkte in mit ihnen incidente Geraden übergeführt werden, hat die Gleichung $(x\,x) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$. Das *Kernbüschel* der Korrelation, d. h. das Büschel, dessen Strahlen mit den ihnen zugeordneten Punkten incidieren, hat die Gleichung $\langle u\,u\rangle \equiv \Sigma\, A_{ik}\, u_i\, u_k = 0$.

Wir brauchen im folgenden die Abkürzungen:

$$(y\,z) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, y_i\, z_k, \qquad \langle v\,w\rangle \equiv \Sigma\, A_{ik}\, v_i\, w_k. \tag{3}$$

Die Korrelation (1) gibt die Abbildung $x' * u' = f(x * u)$. Es soll nun das Ausgangselement $x * u$ im allgemeinen *stetig* in das ihm gemäß der Korrelation zugeordnete Endelement $x' * u'$ übergeführt werden. Der Zwischenlage $X * U$ sei der Parameter t zugeordnet, den wir kurz als Zeit ansprechen. $t = 0$ und ∞ mögen der Anfangs-, bzw. der Endlage zugeordnet sein.

3. Lineare Führung.

Es ist naheliegend, das Anfangselement x^*u derart zu führen, daß der Punkt x des Elementes sich auf der Verbindungsgeraden $x\,x'$ bewegt, und die Gerade u des Elementes sich um den Schnittpunkt uu' dreht. Wir nennen dies eine „lineare Führung". Sie gibt den Ansatz:

$$\tau\, X_i = x_i + \lambda\, t\, x_i', \qquad \tau'\, U_i = u_i + \mu\, t\, u_i'. \tag{4}$$

τ, τ' sind Proportionalitätsfaktoren der homogenen Koordinaten. x_i', u_i' sind durch (2) gegeben, während λ und μ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, u_1, u_2, \ldots$ darstellen, über die noch verfügt werden kann. Zunächst ist die Incidenzbedingung $\Sigma\, X_i\, U_i = 0$ zu erfüllen. Sie ergibt wegen $\Sigma\, u_i\, x_i = 0$ und $\Sigma\, u_i'\, x_i' = 0$:

$$\frac{1}{\sigma}\, t\lambda\, \langle u\,u\rangle + \frac{1}{\varrho}\, \mu\, t\, (x\,x) = 0 \text{ oder } \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\sigma}{\varrho}\, \frac{(x\,x)}{\langle u\,u\rangle}. \tag{5}$$

Ist Δ die Determinante (a_{ik}), so gelten die später zu verwendenden Beziehungen:

$$(x'\,x') = \Sigma a_{ik}\, x_i'\, x_k' = \frac{\Delta}{\sigma}\,\Sigma u_k\, x_k' = \frac{\Delta}{\sigma^2}\,\Sigma A_{ki}\, u_k\, u_i = \frac{\Delta}{\sigma^2}\,\langle uu\rangle; \qquad (6)$$

entsprechend:

$$\langle u'\,u'\rangle = \frac{\Delta}{\varrho^2}\,(x\,x). \qquad (7)$$

4. Leitgleichungen.

Jedem festen Punkt x ordnen wir eine mit der Zeit variierende Kurve zweiter Ordnung, jeder festen Geraden u ein mit der Zeit variierendes Büschel zweiter Klasse zu. In den laufenden Punktkoordinaten X_i, bzw. Geradenkoordinaten U_i lauten deren Gleichungen:

$$\Omega_t \equiv (x\,x)\,(X\,X) - (x\,X)\,(X\,x) + t^2\,(X\,x)^2 = 0, \qquad (8)$$

$$\Psi_t \equiv \langle uu\rangle\langle UU\rangle - \langle uU\rangle\langle Uu\rangle + t^2\langle Uu\rangle^2 = 0. \qquad (9)$$

Für $t = \infty$ stellt $\Omega_\infty = 0$, d. h. $(X\,x)^2 = 0$, die doppelt zu zählende Gerade u', $\Psi_\infty = 0$, d. h. $\langle Uu\rangle^2 = 0$, den doppelt zu zählenden Punkt x' dar. In der Tat ist

$$(X\,x) \equiv \Sigma a_{ik}\, X_i\, x_k = \varrho\,\Sigma u_i'\, X_i,\ \langle Uu\rangle \equiv \Sigma A_{ik}\, U_i\, u_k = \sigma\,\Sigma x_i'\, U_i.$$

$\Omega_0 = 0$ stellt ein Geradenpaar dar, nämlich die beiden Geraden des Kernbüschels, die durch x gehen. $\Psi_0 = 0$ bestimmt ein Punktepaar, nämlich die beiden Punkte der Kernkurve, die auf u liegen.

Die Gebilde, die sich aus (8) und (9) für $t = 1$ ergeben, nennen wir die *Eichkurve* des Punktes x, bzw. das *Eichbüschel* der Geraden u.

5. Bestimmung von λ und μ.

Nun verlangen wir, daß zur Zeit t der Punkt X des Elementes $X * U$ der Kurve $\Omega_t = 0$, die Gerade U hingegen dem Büschel $\Psi_t = 0$ angehöre. Hierzu sind in (8) und (9) die Ansätze (4) einzuführen. Aus den Beziehungen

$$\tau^2\,(X\,X) = \Sigma a_{ik}\,(x_i + \lambda\, t\, x_i')\,(x_k + \lambda\, t\, x_k') = (x\,x) + \lambda\, t\,(x\,x') + \lambda^2\, t^2\,(x'\,x'),$$

$$\tau\,(x\,X) = (x\,x) + \lambda\, t\,(x\,x'),\ \ \tau\,(X\,x) = (x\,x),$$

$$\tau'^2\langle UU\rangle = \Sigma A_{ik}\,(u_i + \mu\, t u_i')\,(u_k + \mu\, t u_k') = \langle uu\rangle + \mu\, t\langle uu'\rangle +$$

$$+ \mu^2\, t^2\langle u'\,u'\rangle, \qquad \tau'\langle uU\rangle = \langle uu\rangle + \mu\, t\langle uu'\rangle,\ \tau'\langle Uu\rangle = \langle uu\rangle$$

ergibt sich:

$\tau^2 \Omega_t = (x\,x)\, t^2\, [(x'\ x')\ \lambda^2 + (x\,x)]$, $\tau'^2\, \Psi_t = \langle u\,u\rangle\, t^2\, [\langle u'\ u'\rangle \mu^2 + \langle u\,u\rangle]$.

Die geforderte Incidenz mit $\Omega_t = 0$, bzw. $\Psi_t = 0$ ist somit erfüllt für:

$$\lambda^2 = -\frac{(x\,x)}{(x'\ x')} \text{ und } \mu^2 = -\frac{\langle u\,u\rangle}{\langle u'\ u'\rangle}.$$

Wegen (6) und (7) kann man auch schreiben:

$$\lambda^2 = -\frac{\sigma^2}{\Delta}\frac{(x\,x)}{\langle u\,u\rangle}, \quad \mu^2 = -\frac{\varrho^2}{\Delta}\frac{\langle u\,u\rangle}{(x\,x)}. \tag{10}$$

Der Ansatz

$$\tau\, X_i = x_i + \lambda\, t\, x_i' = x_i + t\sqrt{-\frac{(x\,x)}{\langle u\,u\rangle \Delta}}\,\sigma\, X_i',$$

$$\tau'\, U_i = u_i + \mu\, t\, u_i' = u_i - t\sqrt{-\frac{\langle u\,u\rangle}{(x\,x)\Delta}}\,\varrho\, u_i'.$$

erfüllt auch die Incidenzbedingung (5), wobei die Wurzeln mit denselben Vorzeichen zu nehmen sind. Die Gleichungen

$$\boxed{\tau\, X_i = x_i + t\sqrt{-\frac{(x\,x)}{\langle u\,u\rangle \Delta}}\sum_k A_{ik}\, u_k, \quad \tau'\, U_i = u_i - t\sqrt{-\frac{\langle u\,u\rangle}{(x\,x)\Delta}}\sum_k a_{ik}\, x_k} \tag{11}$$

stellen also für jedes feste t ein Element $X * U$ dar, ferner gehört zur Zeit t der Punkt X des Elementes der Leitkurve $\Omega_t = 0$, die Gerade U dem Leitbüschel $\Psi_t = 0$ an.

6. Ergebnis.

Die Gleichungen (11) liefern, wenn t von 0 bis ∞ wächst, eine im allgemeinen stetige Überführung des Ausgangselementes $x * u$ in das Endelement $x' * u'$, das dem ersteren durch die Korrelation (1) zugeordnet ist. Hierbei löst sich $x * u$ in zwei Elemente auf (verschiedene Vorzeichen der Wurzel), die sich für $t \to \infty$ im Endelement wieder vereinigen. Die Führung ist linear. Die sämtlichen Elemente des Punktes x verwandeln sich in Elemente $X * U$, deren Geraden zur Zeit t das Büschel $\Psi_t = 0$ bilden, während ihre Punkte X die Kurve $\Omega_t = 0$ darstellen. Da bei einer allgemeinen Korrelation ($a_{ik} \neq a_{ki}$) das Tangentenbüschel von $\Omega_t = 0$ nicht identisch ist mit dem Büschel $\Psi_t = 0$, stellt unsere kontinuierliche Transformation keine Berührungstransformation, sondern eine allgemeinere Transformation dar. Es ist nicht

schwer, ihre Unstetigkeiten zu überblicken. Sie treten für die Punkte der Kernkurve und die Strahlen des Kernbüschels ein. Auch die Realitätsverhältnisse sind leicht zu überschauen.

7. Stetige Vermittlung der Polaritäten.

Ist die zugrunde gelegte Bilinearform $(x'\ x)$ symmetrisch, d. h. $a_{ik} = a_{ki}$, so heißen die Leitgleichungen (8) und (9):

$$\Omega_t \equiv (x\,x)\,(X\,X) - (1-t^2)\,(x\,X)^2 = 0,\ \Psi_t \equiv \langle u\,u\rangle \langle U\,U\rangle - (1-t^2)\langle u\,U\rangle^2 = 0. \tag{12}$$

Für $t = 1$ ergibt sich die Fundamentalkurve $(X\,X) = 0$ der Polarität, bzw. deren Tangentenbüschel $\langle U\,U\rangle = 0$.

Die kontinuierliche Transformation (11) *stellt im Falle der Polarität eine Berührungstransformation dar.* $\Omega_t = 0$ ist ihre Leitgleichung. Der Beweis ergibt sich daraus, daß die Ausdrücke (11) außer der Gleichung $\Omega_t = 0$ in diesem Falle auch den Bedingungen

$$\Sigma\ \frac{\partial\,\Omega}{\partial\,x_i}\,u_i = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,X_i}\,U_i = 0$$

genügen.

$\Omega_t = 0$ stellt den Kegelschnitt dar, der die Fundamentalkurve in deren Schnittpunkten mit der Polaren $(x\,X) = 0$ des Punktes x berührt, d. h. einen nichteuklidischen Kreis. Ein Punkt x als Gesamtheit seiner Linienelemente verwandelt sich somit in nichteuklidische Kreise, die schließlich in die doppelt zu zählende Polare u' von x ausarten. Der Parameter t, der bisher als Zeit angesprochen wurde, gibt ein Maß für den Radius des „Kreises" $\Omega_t = 0$.

Es bedeute $T_t\,(x * u) = X * U$ die Transformation (11) mit $a_{ik} = a_{ki}$. Führt man $T_t\,(x * u)$ und $T_{t'}\,(X * U)$ hintereinander aus, so ergibt sich

$$T_t\,T_{t'} = T_{t''} \text{ mit } t'' = \frac{t + t'}{1 + t\,t'}. \tag{13}$$

Mit tghyp $s = t$ erhält (13) die Form $s'' = s + s'$. Ferner:

$$\operatorname{coshyp}^2 s = \frac{(x\,X)^2}{(x\,x)\,(X\,X)},\ (s \text{ als Abstandsmaß der Punkte } x \text{ und } X).$$

(11) *stellt also die eingliedrige Gruppe der nichteuklidischen Dilatationen, das heißt das nichteuklidisch gefaßte Huygens'sche Prinzip dar.*

8. Inhomogene Formeln.

Der Übersicht wegen geben wir noch die Formeln in inhomogenen kartesischen Punktkoordinaten x, y, z und zugehörigen Ebenenkoordinaten u, v, w für die Polarität, die durch die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ bestimmt ist. Die kontinuierliche Transformation, welche das Element $x\,y\,z\,u\,v\,w$ in das entsprechende Element $x'\,y'\,z'\,u'\,v'\,w'$ überführt (Incidenzbedingung: $U\,X + V\,Y + W\,Z + 1 = 0$) lautet:

$$X = \frac{x - \lambda t u}{1 + \lambda t}, \quad Y = \frac{y - \lambda t v}{1 + \lambda t}, \quad Z = \frac{z - \lambda t w}{1 + \lambda t},$$

$$U = \frac{\lambda u - t x}{\lambda + t}, \quad V = \frac{\lambda v - t y}{\lambda + t}, \quad W = \frac{\lambda w - t z}{\lambda + t};$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-(x^2 + y^2 + z^2 - 1) : (u^2 + v^2 + w^2 - 1)}.$$

Die Leitgleichung erhält die Form:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\,(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) - (1 - t^2)(x\,X + y\,Y + z\,Z - 1)^2 = 0.$$

9. Nichteuklidische Drehzylinder.

Wir verwenden wieder homogene Koordinaten und die früheren Bezeichnungen. Die Geraden des Raumes ($n = 4$) verwandeln sich bei der stetigen Vermittlung einer Polarität in nichteuklidische Drehzylinder. Sind b und c die (reellen oder imaginären) Schnittpunkte der Geraden g, d und e die Schnittpunkte der Polaren h von g mit der Fundamentalfläche, so erhält man als Gleichung für den Ort der Flächenelemente, die aus den mit g incidenten ($t = 0$) Flächenelementen zur Zeit t hervorgehen:

$$(b\,c)\,(d\,X)\,(e\,X) + t^2\,(d\,e)\,(b\,X)\,(c\,X) = 0.$$

Diese Quadriken berühren die Fundamentalfläche der Polarität in ihren Schnittpunkten mit g und h.

Mit diesem und dem in Nr. 7 gezeigten Ergebnis läßt sich die kontinuierliche Vermittlung der Polarität gut überschauen. Ferner bemerken wir, daß die formale Identität zwischen Winkel- und Längenmaß in den nicht ausgearteten Maßbestimmungen nunmehr in dem Sinne zu einer inhaltlichen erweitert erscheint, daß Winkel und Strecken stetig ineinander übergeführt werden können.

Anwendung der Methode Picones auf ein Wärmeleitungsproblem.*

Von

Peter Lesky, Innsbruck.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 24. Februar 1950.)

Auf dem Mathematiker-Kongreß in Innsbruck (29. 8. — 2. 9. 1949) gab *M. Picone* Mitteilung von einer neuen Methode zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen, die in den allgemeinsten Fällen anwendbar und in seinem Institut in Rom schon vielfach erprobt worden ist. Im vorausgehenden Artikel dieser Monatshefte ist eine kurze Darstellung dieser Methode erschienen. Es dürfte daher nützlich sein, an dem hier folgenden Beispiel die Anwendung dieser neuen Methode kennen zu lernen; das Beispiel ist so gewählt, daß es hier noch möglich ist, die Lösung nach den klassischen Methoden in geschlossener Form darzustellen, um die numerischen Resultate der beiden Methoden vergleichen zu können. *W. Gröbner.*

1. Klassische Methode, Lösung mittels Reihenansatz.

Im quadratischen Bereich $0 < \frac{x}{y} < l$ gelte für die Temperaturverteilungsfunktion $u\,(x\ y)$ die Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

wobei als Randbedingungen die folgenden vier Strahlungsbedingungen vorgeschrieben seien:

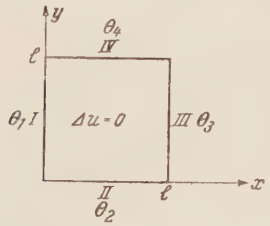

Abb. 1.

$$\text{I: } (x = 0)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha_1}{\lambda}(u - \theta_1),$$

$$\text{II: } (y = 0)\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha_2}{\lambda}(u - \theta_2),$$

$$\text{III: } (x = l)\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha_3}{\lambda}(u - \theta_3),$$

* Auszug aus einer an der philosophischen Fakultät Innsbruck eingereichten Dissertation. Mein Lehrer W. Gröbner hat diese Arbeit mit Rat und Hilfe begleitet, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank sage.

$$\text{IV: } (y = l)\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\alpha_4}{\lambda}(u - \theta_4).^1$$

Diese Strahlungsbedingungen erhält man aus den beiden Beziehungen für den Wärmefluß

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \alpha_s (u - \theta)\, df \text{ (Newton)} \\ \frac{dQ}{df} &= \lambda_s \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\alpha_s}{\lambda_s}(u - \theta).$$

Hierin bedeuten: n die innere Normale, θ die Temperatur des anliegenden Bereiches, u die Temperatur im Inneren des Körpers, α_s den Strahlungskoeffizienten (gemessen in Cal/m² h °C), λ_s den Koeffizienten der inneren Wärmeleitfähigkeit (gemessen in Cal/m h °C). Letzteren nehmen wir in allen vier Randbedingungen gleich an. Die Außentemperaturen sind jeweils Funktionen einer Variablen

$$\theta_1(y), \theta_2(x), \theta_3(y), \theta_4(x).$$

Wir wählen in einem speziellen Beispiel $l = 0{,}1$ m; $\lambda = 1$ Cal/m h °C und $\alpha = 10$ Cal/m² h °C auf allen vier Seiten gleich. An der II. Seite ($y = 0$) sei die Temperatur des umgebenden Mittels konstant 0 °C, an der IV. Seite ($y = 0{,}1$) konstant 100 °C. An den Seiten I ($x = 0$) und III ($x = 0{,}1$) sei ein lineares Temperaturgefälle von 100 °C auf 0 °C vorhanden. Somit lauten unsere speziellen Randbedingungen

$$\text{I: } (x = 0)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 10\,u - 10.000\,y,$$

$$\text{II: } (y = 0)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 10\,u,$$

$$\text{III: } (x = 0{,}1)\ \frac{\partial u}{\partial x} = -10\,u + 10.000\,y,$$

$$\text{IV: } (y = 0{,}1)\ \frac{\partial u}{\partial y} = -10\,u + 1000.$$

Wir machen die I. und III. Randbedingung homogen, indem wir substituieren

$$\bar{u} = u + \gamma x + \delta;$$

so erhalten wir

[1] Die Randbedingungen brauchen nicht notwendig an den Eckpunkten zu gelten, da sie sich dort gegenseitig widersprechen können.

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_3 (\theta_1 - \theta_3)}{\lambda (\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_1 \alpha_3 l} = F_1(y),$$

$$\delta = -\frac{\lambda (\alpha_1 \theta_1 + \alpha_3 \theta_3) + \alpha_1 \alpha_3 l \theta_1}{\lambda (\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_1 \alpha_3 l} = F_2(y).$$

Indem wir $\theta_1(y)$ und $\theta_3(y)$ zweimal differenzierbar voraussetzen, wird aus der Differentialgleichung (1)

$$\Delta \bar{u} = F_1''(y) \cdot x + F_2''(y) = G(x\,y) \tag{1'}$$

und aus den Randbedingungen

$$\text{I}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\alpha_1}{\lambda} \bar{u} = 0, \qquad b_2(0) = F_1'(0) - \frac{\alpha_2}{\lambda} F_1(0);$$

$$\text{II}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\alpha_2}{\lambda} \bar{u} = b_2(0) \cdot x + c_2(x, 0),\ c_2(x,0) = F_2'(0) - \frac{\alpha_2}{\lambda}(F_2(0) + \theta_2);$$

$$\text{III}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\alpha_3}{\lambda} \bar{u} = 0, \qquad b_4(l) = F_1'(l) + \frac{\alpha_4}{\lambda} F_1(l);$$

$$\text{IV}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\alpha_4}{\lambda} \bar{u} = b_4(l) \cdot x + c_4(x, l),\ c_4(x,l) = F_2'(l) + \frac{\alpha_4}{\lambda}(F_2(l) + \theta_4).$$

In unserem speziellen Fall wird $\gamma = 0$ und $\delta = -1000\,y$, also $\bar{u} = u - 1000\,y$ und somit

$$\Delta \bar{u} = 0 \text{ mit} \quad \text{I}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 10\,\bar{u} = 0,$$

$$\text{II}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - 10\,\bar{u} = 10.000\,y - 1000,$$

$$\text{III}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 10\,\bar{u} = 0,$$

$$\text{IV}': \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + 10\,\bar{u} = -10.000\,y.$$

Wir suchen die Lösung durch einen Reihensatz

$$\bar{u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)$$

darzustellen, wobei die $\varphi_\nu(x)$ ein in $0 \leqq x \leqq l$ vollständiges Funktionensystem sein sollen, dessen Wahl wir uns noch vorbehalten. Wir verlangen ferner, daß die ersten Ableitungen der Reihe im ganzen Quadrat (samt Rand) und die zweiten Ableitungen der Reihe in jedem abgeschlossenen Bereich des Quadratinneren gleichmäßig konvergieren, das heißt, daß

die Reihe dort gliedweise einmal, beziehungsweise zweimal differenzierbar ist. Daß die Lösung, die wir jetzt konstruieren werden, diese Bedingungen erfüllt, werden wir später in der Konvergenzbetrachtung nachweisen.

Wir stellen nun die Bedingungen

$$\varphi_\nu''(x) = -\varrho_\nu^2 \varphi_\nu(x), \tag{2}$$

woraus

$$\Delta \bar{u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [-\varrho_\nu^2 \psi_\nu(y) + \psi_\nu''(y)] \varphi_\nu(x) = G(x\,y) \tag{3}$$

folgt. Ferner stellen wir die Bedingungen

$$\begin{cases} \varphi_\nu'(0) - \dfrac{\alpha_1}{\lambda} \varphi_\nu(0) = 0, \\ \varphi_\nu'(l) + \dfrac{\alpha_3}{\lambda} \varphi_\nu(l) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

woraus die Erfüllung der Randbedingungen I′ und III′ durch die angesetzte Reihe folgt. Mit (2) und (4) haben wir ein Sturmsches Eigenwertproblem, dessen Eigenfunktionen ein vollständiges und orthogonales Funktionensystem darstellen[2]. Zur Bestimmung der Eigenwerte ergibt sich die Gleichung

$$\operatorname{tg} x_\nu = \frac{e_1 x_\nu}{x_\nu^2 - e_2} \tag{5}$$

mit $x_\nu = \varrho_\nu \cdot l$; $e_1 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{\lambda} l$ und $e_2 = \dfrac{\alpha_1 \alpha_3}{\lambda} l^2$. Die Eigenfunktionen ergeben sich zu

$$\varphi_\nu(x) = \cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu), \tag{6}$$

wobei

$$\cos\beta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{\sqrt{\varrho_\nu^2 + (\frac{\alpha_1}{\lambda})^2}}, \quad \sin\beta_\nu = \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}}{\sqrt{\varrho_\nu^2 + (\frac{\alpha_1}{\lambda})^2}}$$

ist. Untersucht man die Konvergenz der Eigenwerte gegen die ganzzahligen Vielfachen von π, so erhält man die Abschätzung

$$\nu\pi < x_{\nu+1} < \nu\pi + \frac{e_1}{\nu\pi}. \tag{7}$$

Aus (3) folgen nun für die $\psi_\nu(y)$ die Differentialgleichungen

[2] Vergleiche etwa *Bieberbach*, Differentialgleichungen, Berlin 1930, S. 178ff

$$\psi_\nu''(y) - \varrho_\nu^2 \psi_\nu(y) = f_\nu(y), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

wobei die

$$f_\nu(y) = \frac{\int_0^l G(x\,y)\,\varphi_\nu(x)\,dx}{\sigma_\nu} \tag{9}$$

mit

$$\sigma_\nu = \int_0^l \varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[l + \frac{1}{2\varrho_\nu}\sin(2\varrho_\nu l - 2\beta_\nu) + \frac{1}{2\varrho_\nu}\sin 2\beta_\nu\right]$$

die Fourierkoeffizienten von $G(x\,y)$ sind. Da $G(x\,y)$ und die $\varphi_\nu(x)$ bekannt sind, lassen sich die Integrale (9) sofort berechnen. Hier benötigen wir die etwas langwierige, aber nicht umständliche Berechnung nicht, da in unserem speziellen Beispiel $G(x\,y) = 0$ ist und somit auch die $f_\nu(y)$ zu Null werden.

Ferner haben wir in unserem speziellen Beispiel für Gleichung (5) $e_1 = 2$ und $e_2 = 1$, aus der sich folgende Eigenwerte ergeben:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & x_3 &= 6{,}58462; \\ x_1 &= 1{,}30663; & x_4 &= 9{,}63196; \\ x_2 &= 3{,}67320; & x_5 &= 12{,}72323; \ldots \end{aligned}$$

Zu den Differentialgleichungen

$$\psi_\nu''(y) - \varrho_\nu^2 \psi_\nu(y) = 0 \tag{8'}$$

erhalten wir aus II′ und IV′ noch die Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\nu'(0) - \frac{\alpha_2}{\lambda}\psi_\nu(0) &= \frac{\int_0^l [b_2(0)\,.\,x + c_2(x,0)]\,\varphi_\nu(x)\,dx}{\sigma_\nu} = m_\nu(0), \\ \psi_\nu'(l) + \frac{\alpha_1}{\lambda}\psi_\nu(l) &= \frac{\int_0^l [b_4(l)\,.\,x + c_4(x,l)]\,\varphi_\nu(x)\,dx}{\sigma_\nu} = n_\nu(l), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wobei die $m_\nu(0)$ und $n_\nu(l)$ als

$$m_\nu(0) = \frac{1}{\sigma_\nu \varrho_\nu}\{b_2(0)\left[l\sin(\varrho_\nu l - \beta_\nu) + \frac{1}{\varrho_\nu}(\cos(\varrho_\nu l - \beta_\nu) - \cos\beta_\nu)\right] + \varrho_\nu \int_0^l c_2(x,0)\cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu)\,dx\},$$

$$n_\nu(l) = \frac{1}{\sigma_\nu \varrho_\nu}\{b_4(l)\,[l\sin(\varrho_\nu l - \beta_\nu) + \frac{1}{\varrho_\nu}(\cos(\varrho_\nu l - \beta_\nu) - \cos\beta_\nu)] + \\ + \varrho_\nu \int_0^l c_4(x,l)\cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu)\,dx\}$$

gefunden werden.

Für unser spezielles Beispiel erhält man:

$m_0(0) = n_0(0{,}1) = 0;$ $\quad m_3(0) = n_3(0{,}1) = -87{,}28;$
$m_1(0) = n_1(0{,}1) = -1070{,}15;$ $\quad m_4(0) = n_4(0{,}1) = 0;$
$m_2(0) = n_2(0{,}1) = 0;$ $\quad m_5(0) = n_5(0{,}1) = -24{,}33;$
. . . .

Die Lösung der Differentialgleichungen (8′) mit den Randbedingungen (10) lautet

$$\psi_\nu(y) = D_1^{(\nu)}\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu y) + D_2^{(\nu)}\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu y) \tag{11}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} D_1^{(\nu)} &= \frac{m_\nu(0)\,[\varrho_\nu\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu l) + \frac{\alpha_4}{\lambda}\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu l)] + n_\nu(l)\,\frac{\alpha_2}{\lambda}}{\left[\varrho_\nu^2 + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\lambda}\right]\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu l) + \frac{\alpha_2+\alpha_4}{\lambda}\,\varrho_\nu\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu l)} \\ D_2^{(\nu)} &= \frac{n_\nu(l)\cdot\varrho_\nu - m_\nu(0)\,[\varrho_\nu\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu l) + \frac{\alpha_2}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu l)]}{\left[\varrho_\nu^2 + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\lambda}\right]\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu l) + \frac{\alpha_2+\alpha_4}{\lambda}\,\varrho_\nu\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu l).} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die endgültige Lösung des Problems ist dann durch die Reihe

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty}\cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu)\,[D_1^{(\nu)}\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu y) + D_2^{(\nu)}\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu y)] - \gamma x - \delta \tag{13}$$

dargestellt. Sind die $f_\nu(y)$ nicht Null, dann ändert sich die Lösung durch Hinzukommen weiterer von $f_\nu(0)$ und $f_\nu(l)$ abhängiger Glieder.

Im speziellen Beispiel findet man

$D_1^{(0)} = D_2^{(0)} = 0;$ $\quad D_1^{(3)} = -1{,}15117;\ D_2^{(3)} = 1{,}14799;$
$D_1^{(1)} = -56{,}33288;\ D_2^{(1)} = 32{,}32925;$ $\quad D_1^{(4)} = D_2^{(4)} = 0;$
$D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = 0;$ $\quad D_1^{(5)} = -0{,}17729;\ D_2^{(5)} = 0{,}17729;\ldots$

Die durch eine unendliche Reihe (13) dargestellte Funktion $u(x\,y)$ erfüllt formal die Differentialgleichung und die Randbedingungen

unseres Problems; daß sie tatsächlich die gesuchte Lösung liefert, wird dann sichergestellt sein, wenn wir gezeigt haben, daß sie die vorausgesetzten Konvergenzeigenschaften besitzt. Wir müssen nämlich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (13) und ihrer ersten Ableitungen im ganzen Quadrat (samt Rand), ihrer zweiten Ableitungen im Inneren des Quadrates nachweisen[3].

Wir suchen eine konvergente Majorante, so daß

$$|\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)| < a_\nu$$

in $0 \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leqq l$ gilt, dann ist dort die Reihe absolut und somit auch gleichmäßig konvergent.

Zunächst ist

$$\varphi_\nu(x) \leqq 1$$

für alle x. Bezeichnet man den durch ϱ_ν dividierten Nenner der $D_i^{(\nu)}$ mit N, so erhält man

$$\psi_\nu(y) = \frac{1}{N}\{n_\nu(l)\,[\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu y) + \frac{\alpha_2}{\lambda\,\varrho_\nu}\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu y)] -$$

$$- m_\nu(0)\,[\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu(l-y) + \frac{\alpha_4}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\varrho_\nu(l-y)]\}.$$

Wählen wir ν zur Konvergenzuntersuchung genügend groß, dann ist

$$\sigma_\nu > \frac{l}{4}$$

und die Abschätzung der $m_\nu(0)$, beziehungsweise der $n_\nu(l)$ liefert

$$m_\nu(0) \sim \frac{B}{2\,\varrho_\nu} \text{ mit } B = 4\,b_2(0) + \frac{4}{l}[\,|c_2(l,0)| + |c_2(0,0)|\,],$$

$$n_\nu(l) \sim \frac{C}{2\,\varrho_\nu} \text{ mit } C = 4\,b_4(l) + \frac{4}{l}[\,|c_4(l,l)| + |c_4(0,l)|\,];$$

somit ergibt sich

$$\psi_\nu(y) \sim \frac{C\,\mathfrak{Cof}(\varrho_\nu y) - B\,\mathfrak{Cof}\,\varrho_\nu(l-y)}{2\,\varrho_\nu^2\,\mathfrak{Sin}(\varrho_\nu l)}$$

und da ν sehr groß gewählt wurde

$$\psi_\nu(y) \sim \frac{C\,e^{\varrho_\nu(y-l)} - B\,e^{-\varrho_\nu y}}{2\,\varrho_\nu^2}.$$

[3] Ecken ausgeschlossen.

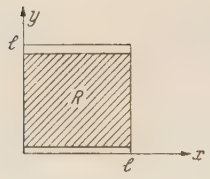

Abb. 2.

Für ein Rechteck R $\begin{cases} 0 < \varepsilon \leqq y \leqq l - \varepsilon < l \\ 0 \leqq x \leqq l \end{cases}$ sind sicher beide Exponenten negativ. Da laut (7)

$$\varrho_{\nu+1} > \frac{\nu\pi}{l}$$

gilt, folgt

$$|\psi_{\nu+1}(y)| < \varkappa \frac{\alpha^\nu}{\nu^2},$$

wobei $\alpha = \max\left(e^{-\frac{\pi}{l}y}, e^{-\frac{\pi}{l}(l-y)}\right)$ und $\varkappa$ eine positive Konstante ist.

In R ist $\alpha < 1$; für $y = 0$ und $y = l$ hingegen wird $\alpha = 1$. Im ganzen Quadrat gilt somit

$$|\varphi_{\nu+1}(x)\,\psi_{\nu+1}(y)| \leqq \frac{\varkappa}{\nu^2},$$

wodurch die konvergente Majorante gefunden ist. Die Untersuchung der Ableitungen liefert

$$|\varphi'_{\nu+1}(x)\,\psi_{\nu+1}(y)| < \frac{\varkappa_1 \alpha^\nu}{\nu}; \quad |\varphi_{\nu+1}(x)\,\psi'_{\nu+1}(y)| < \frac{\varkappa_3 \alpha^\nu}{\nu},$$

$$|\varphi''_{\nu+1}(x)\,\psi_{\nu+1}(y)| < \varkappa_2 \alpha^\nu; \quad |\varphi_{\nu+1}(x)\,\psi''_{\nu+1}(y)| < \varkappa_4 \alpha^\nu;$$

mit gewissen positiven Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3\, \varkappa_4$; das heißt in R konvergieren auch die ersten und zweiten Ableitungen gleichmäßig.

Für $y = 0$ und $y = l$ versagt wegen $\alpha = 1$ obige absolute Abschätzung. Dort ist

$$\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y) \sim C_1 \cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu); \quad \varphi_\nu(x)\,\psi_\nu'(y) \sim \frac{C_2 \cos(\varrho_\nu x - \beta_\nu)}{\nu},$$

wobei $\Sigma \dfrac{\cos \nu x}{\nu}$ in jedem abgeschlossenen, ganz im Inneren des Intervalles 0 bis π liegenden Bereich gleichmäßig konvergent ist.

Sind die $f_\nu(y)$ nicht Null, so verläuft der Konvergenzbeweis analog und bringt dasselbe Endergebnis wie der hier geführte.

In unserem speziellen Beispiel entfallen die Glieder mit geradem ν. Die Glieder $\nu = 1, 3, 5$ folgen in den Tabellen:

x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
$\cos(\varrho_1 x - \beta_1)$	0,7941	0,9241	0,9916	0,9916	0,9241	0,7941
$\cos(\varrho_3 x - \beta_3)$	0,9887	0,3936	−0,7909	−0,7909	0,3936	0,9887
$\cos(\varrho_5 x - \beta_5)$	0,9969	−0,7805	0,2941	0,2941	−0,7805	0,9969

y	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
$C_1^{(1)} \mathfrak{Sin}(\varrho_1 y) + C_2^{(1)} \mathfrak{Cof}(\varrho_1 y)$	32,3293	18,5494	6,0416	−6,0448	−18,55	−32,357
$C_1^{(3)} \mathfrak{Sin}(\varrho_3 y) + C_2^{(3)} \mathfrak{Cof}(\varrho_3 y)$	1,148	0,3022	0,0624	−0,0606	−0,3025	− 1,1494
$C_1^{(5)} \mathfrak{Sin}(\varrho_5 y) + C_2^{(5)} \mathfrak{Cof}(\varrho_5 y)$	0,1773	0,0139	0,00092	0,00009	0,00001	0,00000

Das endgültige Ergebnis unter Berücksichtigung der ersten sechs Glieder der Reihe ergibt sich dann:

Temperatur $u(x\,y)$ in $^0\,C$:

y \ x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
0,00	26,99	30,19	31,19	31,19	30,19	26,99
0,02	35,04	37,25	38,17	38,17	37,25	35,04
0,04	44,86	45,60	45,95	45.95	45,60	44,86
0,06	55,14	54,39	54,05	54.05	54.39	55,14
0,08	64,97	62,74	61,83	61,83	62,74	64,97
0,1	73,14	69,62	66,94	66,94	69,62	73,14

Wir schließen eine graphische Darstellung des Ergebnisses an, wo die Isothermen 30^0, 40^0, 50^0, 60^0 und 70^0 eingetragen sind:

2. Piconesche Methode.[4]

Wir betrachten einen beliebigen, durch eine reguläre Kurve begrenzten Bereich $\mathfrak{B}$ der xy-Ebene. $\alpha(Q)$ und $\beta(Q)$ seien Funktionen des Punktes Q, der auf der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ variabel

[4] Die Anleitung zu den folgenden Entwicklungen verdanke ich einer brieflichen Mitteilung Prof. Picones.

ist. Wir verlangen, daß auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ $\alpha(Q) < 0$ ist, und daß α und β stetige Funktionen von Q sind. Wir wollen nun eine in $\mathfrak{B}$ harmonische Funktion u berechnen, die auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ der Randbedingung $\frac{du}{dn} + \alpha u = \beta$ genügt.

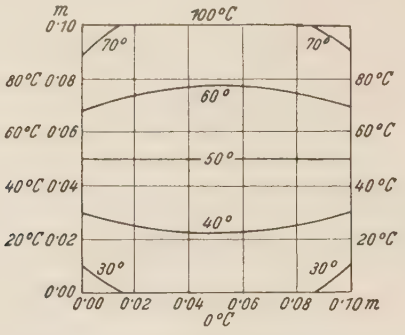

Abb. 3.

Hiezu nehmen wir $\mathfrak{B}$ einfach zusammenhängend an; ferner sei $\{\omega_\kappa(P)\}$ das System der harmonischen homogenen Polynome

$$R(x+iy)^h,\ I(x+iy)^h \tag{14}$$

für $h = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $x\ y$ die Koordinaten eines beliebigen inneren Punktes P des Bereiches $\mathfrak{B}$ bedeuten. Es bestehen folgende Theoreme, welche die Konvergenz der Picone'schen Methode zu beweisen erlauben:

I. Bedeutet n die innere Normale von $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$, dann ist das System $\{\frac{d\omega_\kappa}{dn} + \alpha\omega_\kappa\}$ auf dem Rande des Bereiches im hilbertschen Sinne vollständig.[5]

II. Ist $u(P)$ eine beliebige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ in $\mathfrak{B}$, welche dort stetig und einmal differenzierbar ist, dann kann man für jede natürliche Zahl m, m Konstante

$$c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}$$

so festlegen, daß für die Funktionen

$$u^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(m)} \omega_i, \quad m = 1, 2, \ldots$$

gilt:

a) Die Folge $\{u^{(m)}\}$ konvergent auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ im Mittel gegen u;

[5] Gaetano Fichera, Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni. Ann. di Mat. pura e appl. Serie 4, **27** (1948) p. 28.

b) Die Folge der Vektoren $\{\text{grad } u^{(m)}\}$ konvergiert in $\mathfrak{B}$ im Mittel gegen grad u.[6]

Jedes Paar von Funktionen u und v, die in $\mathfrak{B}$ harmonisch und regulär sind, erfüllt die Beziehung:

$$\int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \left(u \frac{d\,v}{d\,n} - v \frac{d\,u}{d\,n}\right) d\,s = 0,$$

welche unmittelbar aus der Greenschen Formel folgt, da $\Delta\, u = \Delta\, v = 0$ ist. Die Lösung unseres Problems genügt daher den unendlich vielen Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \left(u \frac{d\,\omega_\kappa}{d\,n} - \omega_\kappa \frac{d\,u}{d\,n}\right) d\,s = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Daraus erhält man durch Einsetzen von $\dfrac{d\,u}{d\,n} = -\alpha\, u + \beta$

$$\int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \left(\frac{d\,\omega_\kappa}{d\,n} + \alpha\,\omega_\kappa\right) u\, d\,s = \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \beta\,\omega_\kappa\, d\,s \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16}$$

Setzen wir anstelle von u eine endliche Reihe $U^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} a^{(m)}\omega_i$ mit unbestimmten Koeffizienten $a_i^{(m)}$, so erhalten wir das System

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \left(\frac{d\,\omega_\kappa}{d\,n} + \alpha\,\omega_\kappa\right) \omega_i\, d\,s = \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \beta\,\omega_\kappa\, d\,s \quad k = 1, 2, \ldots m. \tag{17}$$

Wir zeigen nun, daß die $a_i^{(m)}$, die man durch Lösung des Gleichungssystems (17) erhält, so beschaffen sind, daß $\{U^{(m)}\}$ im Inneren von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen die Lösung des Problems konvergiert.

Hiezu betrachten wir nach Picone das in den $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots a_m^{(m)}$ quadratische Polynom

$$P^{(m)}(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) =$$
$$= \int_{\mathfrak{B}} \{\text{grad}\,[u - \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)}\omega_i]\}^2\, d\,b - \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \alpha\,[u - \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)}\omega_i]^2\, d\,s. \tag{18}$$

Da voraussetzungsgemäß $\alpha\,(Q) < 0$ gilt, ist dieses Polynom positiv definit. Wir nennen μ_m sein Minimum und behaupten, daß

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m = 0$$

ist. Es gilt tatsächlich

---

[6] Gaetano Fichera, Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico, Ann. Scuola norm. Pisa (1950), Cap VII.

$$\mu_m \leqq P^{(m)}(c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}),$$

wobei $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}$ die im Theorem II genannten Konstanten sind. Da mit Rücksicht auf die oben angeführten Eigenschaften a) und b) dieses Theorems

$$\lim_{m \to \infty} P^{(m)}(c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}) = 0$$

ist, ist auch $\lim_{m \to \infty} \mu_m = 0$.

Die Konstanten $a_i^{(m)}$, welche das Minimum herstellen, erhält man durch Differentiation der Gleichung (18) nach den $a_i^{(m)}$ und Nullsetzen der Ableitungen. So ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die $a_i^{(m)}$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \{ - \int_{\mathfrak{B}} (\operatorname{grad} \omega_i \times \operatorname{grad} \omega_\kappa)\, d\,b + \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \alpha\, \omega_i\, \omega_\kappa\, d\,s \} =$$
$$= - \int_{\mathfrak{B}} (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_\kappa)\, d\,b + \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \alpha\, u\, \omega_\kappa\, d\,s. \qquad (19)$$

Wenden wir zur Umformung der hierin enthaltenen Flächenintegrale in Randintegrale den Greenschen Satz an, der für ein harmonisches $V(x\,y)$

$$\int_{\mathfrak{B}} (U_x\, V_x + U_y\, V_y)\, d\,b = - \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} U\, \frac{d\,V}{d\,n}\, d\,s$$

lautet, so geht (19) in das System (17) über, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Determinante dieses Systems (17) ist sicher verschieden von Null. Denn wäre sie gleich Null, dann gäbe es von Null verschiedene $b_i^{(m)}$, die dem System

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^{(m)} \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \left(\frac{d\,\omega_\kappa}{d\,n} + \alpha\, \omega_\kappa \right) \omega_i\, d\,s = 0$$

genügen würden, welches mit dem System

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^{(m)} \{ \int_{\mathfrak{B}} (\operatorname{grad} \omega_i \times \operatorname{grad} \omega_\kappa)\, d\,b - \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \alpha\, \omega_i\, \omega_\kappa\, d\,s \} = 0 \qquad (20)$$

identisch ist. Durch Multiplikation des Systems (20) mit $b_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, wäre es möglich, das in den b_i quadratisch homogene Polynom

$$P(b_1^{(m)}\, b_2^{(m)} \ldots b_m^{(m)}) = \int_{\mathfrak{B}} [\operatorname{grad} \sum_{i=1}^{m} b_i^{(m)}\, \omega_i]^2\, d\,b - \int_{\mathfrak{R}(\mathfrak{B})} \alpha [\sum b_i^{(m)}\, \omega_i]^2\, d\,s = 0$$

herzustellen, welches offensichtlich einen Widerspruch beinhaltet.

So folgt also, daß die Reihe $U^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} \omega_i$ im Inneren von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig gegen die Lösung und auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{B})$ im Mittel mit dem Gewicht $-\alpha$ konvergiert.

In unserem speziellen Beispiel ist

$$\beta_1 = -10.000\, y; \quad \beta_3 = -10.000\, y;$$
$$\beta_2 = 0; \qquad\qquad \beta_4 = -1000,$$

ferner ist $\alpha = -10$, wie verlangt negativ. Die Polynomsysteme (14) ergeben sich zu

$$h = 0, \quad \omega_1 = 1,$$
$$h = 1, \begin{cases} \omega_2 = x, \\ \omega_3 = y, \end{cases}$$
$$h = 2, \begin{cases} \omega_4 = x^2 - y^2, \\ \omega_5 = 2\, x\, y, \end{cases}$$

Nach Berechnung der in (17) stehenden Integrale folgt die Lösung der Gleichungssysteme für die $a_i^{(m)}$. So erhält man

$$m = 1: \; a_1^{(1)} = 50; \qquad u^{(1)} = 50\ ^0\,\mathrm{C}.$$
$$m = 3: \; \left.\begin{aligned} a_1^{(3)} &= 30; \\ a_2^{(3)} &= 0; \\ a_3^{(3)} &= 400; \end{aligned}\right\} \; u^{(3)} = [30 + 400\, y]\ ^0\,\mathrm{C}.$$

Temperatur $U^{(3)}(x\, y)$ in ^{0} C:

y \ x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
0,00	30	30	30	30	30	30
0,02	38	38	38	38	38	38
0,04	46	46	46	46	46	46
0,06	54	54	54	54	54	54
0,08	62	62	62	62	62	62
0,1	70	70	70	70	70	70

$$m = 5: \; \left.\begin{aligned} a_1^{(5)} &= 50 \;; \; a_4^{(5)} = 0; \\ a_2^{(5)} &= 0 \;\; ; \; a_5^{(5)} = 0; \\ a_3^{(5)} &= 400; \end{aligned}\right\} \text{ also selbes Ergebnis wie bei } m{=}3.$$

$$m = 7: \quad \begin{aligned} a_1^{(7)} &= 26{,}93; & a_5^{(7)} &= -2094{,}4; \\ a_2^{(7)} &= 215{,}15; & a_6^{(7)} &= 0; \\ a_3^{(7)} &= 390{,}6; & a_7^{(7)} &= 13962{,}8; \\ a_4^{(7)} &= -2094{,}4; \end{aligned}$$

$$U^{(7)} = [26{,}93 + 215{,}15\,x + 390{,}6\,y - 2094{,}4\,(x^2 + 2\,xy - y^2) + \\ + 13962{,}8\,(3\,x^2\,y - y^3)]^{\,0}\,\mathrm{C}$$

Temperatur $U^{(7)}(x\,y)$ in ^{0} C:

y \ x	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
0,00	26,9	30,4	32,2	32,3	30,8	27,5
0,02	35,5	37,6	38,7	38,8	38,0	36,0
0,04	45,0	45,8	46,3	46,4	46,0	45,6
0,06	54,9	54,3	54,0	54,2	54,5	55,0
0,08	64,4	62,6	61,7	61,7	62,6	64,5
0,1	73,0	69,7	68,2	68,3	69,7	73,0

Schon bei dieser kubischen Näherung zeigt sich nur mehr eine sehr geringe Abweichung von dem mit der klassischen Methode gefundenen Wert, was der praktischen Verwertbarkeit dieser Piconeschen Methode das beste Zeugnis ausstellt.

Buchbesprechungen.

Reine Mathematik. Herausgegeben von *W. Süß*. Teil I und II. („Naturforschung und Medizin in Deutschland, 1939—1946": Band 1 und 2), 316 S. und 265 S. Wiesbaden: Dieterich-Verlag. 1948. DM 10.— pro Band.

Um die Verbindung mit der internationalen Wissenschaft wieder herzustellen, erscheinen Berichte, die eine konzentrierte Übersicht über den Fortschritt und Stand der Wissenschaft in den Jahren 1939—46 in Deutschland bieten. Die vorliegenden Bücher sind der reinen Mathematik gewidmet und enthalten folgende Berichte: 1. Geschichte der Mathematik (Hofmann), 2. Grundlagen der Mathematik (Lorenzen), 3. Elementarmathematik (Zacharias), 4. Algebra und Zahlentheorie (Hasse), 5. Gruppentheorie (Zassenhaus), 6. Verbände (Köthe), 7. Allgemeine Mengen und reelle Funktionen (Nöbeling), 8. Unendliche Zahlenfolgen und Limitierungsverfahren (Knopp), 9. Fastperiodische Funktionen (Maak), 10. Spezielle Funktionen der mathematischen Physik (Magnus), 11. Reihenentwicklungen der mathematischen Physik (Lense), 12. Funktionentheorie (Kneser und Ullrich), 13. Elliptische Modulfunktionen und automorphe Funktionen (Petersson), 14. Gewöhnliche Differentialgleichungen (Müller), 15. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (Bilharz), 16. Potentialtheorie (Maruhn), 17. Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung (Pinl), 18. Spezielle Randwertaufgaben (Buchholz), 19. Variationsrechnung (Boerner), 20. Integralgleichungen (Tautz), 21. Eigenwerttheorie (Wielandt), 22. Funktionalanalysis, Integraltransformationen (Köthe), 23. Grundlagen der Geometrie (Sperner), 24. Analytische und höhere Geometrie (Süß), 25. Algebraische Funktionskörper und algebraische Geometrie (Deuring), 26. Differentialgeometrie (Bol), 26a. Projektive Relativitätstheorie und Kosmologie (Jordan), 27. Theorie der geometrischen Ordnungen, 28. Konvexe Körper und Differentialgeometrie im Großen (Gericke), 29. Integralgeometrie (Maak), 30. Topologie (Seifert und Threlfall). — Die Berichte bringen Referate über Bücher, über Abhandlungen aus Zeitschriften, über Dissertationen und über zahlreiche unveröffentlichte Manuskripte. Wie die Liste zeigt, wurden alle Berichte von Mathematikern verfaßt, die auf diesen Gebieten selbst erfolgreich tätig waren. Bei der großen Zahl der Berichte darf man sich nicht wundern, daß die Berichte recht verschieden geschrieben sind. So enthalten manche nur ganz kurze Noten, andere wieder sind viel ausführlichere Darstellungen. Die Bücher sind wertvolle Übersichts- und Nachschlagewerke.

N. Hofreiter, Wien

Angewandte Mathematik. Herausgegeben von *A. Walther*. Teil III, IV und V. („Naturforschung und Medizin in Deutschland, 1939—1946": Band 5, 6 und 7) 202 S., 116 S. und 263 S. Wiesbaden: Dieterich-Verlag. 1948.

Klarerweise wurde die angewandte Mathematik während des Krieges mehr gepflegt als die reine Mathematik und so wird das Sammelwerk fünf Bände enthalten. Allerdings wurden viele Arbeiten zu Kriegsende vernichtet oder sind heute nicht mehr zugänglich. Um so wichtiger sind die vorliegenden Bände, die zwar auch nicht vollständig sein können, aber von Autoren verfaßt sind, die

sich einen Überblick über die Entwicklung ihres Fachgebietes verschaffen konnten. Die Bücher tragen dazu bei, die Lücken, die in vielen Bibliotheken entstanden sind, wenigstens behelfsmäßig zu schließen. Band III gibt einen Überblick über die großen erzielten Fortschritte auf dem Gebiete der mathematischen Strömungsforschung und vermittelt somit Ergebnisse und Probleme der Strömungslehre in einer weiteren Kreisen der Mathematiker zugänglichen Weise. Er enthält folgende Berichte: 1., 2. Ideale, bzw. zähe Flüssigkeiten (Görtler), 3. Turbulenz (Görtler), 4. Gasdynamik (Sauer), 5., 6. Wärmeüberhang, Tragflügel, Propeller, Pumpen und Turbinen (Wieghardt), 7. Hydraulik, 8. Mechanische Ähnlichkeit (Schiller). Band IV ist der Geodäsie gewidmet. König berichtet über die mathematischen Grundlagen der Geodäsie und Kneissl über den Stand der Geodäsie in Deutschland. Band V enthält Anwendungen der Mathematik auf verschiedene Gebiete: 1. Kinematik (Hain u. Meyer zur Capellen), 2. Rechengetriebetechnik (Bückner), 3. Geometrische Optik (Franke), 4. Kristallgeometrie (Hermann), 5. Elektrotechnik (Kron), 6. Elektromagnetische Wellen (Buchholz), 7. Geophysik (Bartels), 8. Astronomie (Schütte), 9. Ballistik (Athen, Poltz, Zurmühl, Strecke), 10. Kreiselgeräte (Beyerle, Gottwald). Alle Bände enthalten ausführliche Literaturhinweise sowie Sach- und Autorenregister. *N. Hofreiter*, Wien

Le déclin des absolus mathématico-logiques. Von *G. Bouligand* und *J. Desgranges*. (Sammlung „Esprit et méthode".) Mit 6 Textabb., 270 S. Paris: Sedes. 1949.

In diesem Buch nimmt ein hervorragender Forscher und Lehrer der Gegenwart Stellung gegenüber den verschiedenen Strömungen, welche in der Grundlagenforschung und in der Philosophie der Mathematik besonders seit den letzten 50 Jahren neu aufgetreten sind. Denn seit Beginn dieses Jahrhunderts sind in vielen Natur- und Geisteswissenschaften immer deutlicher sogenannte Krisen in Erscheinung getreten, die dadurch hervorgerufen wurden, daß neue Tatsachen zur Erkenntnis gelangten, die sich in einem unlösbaren Widerspruch zu den bisherigen, als unerschütterlich und endgültig angesehenen Prinzipien befanden und so das Vertrauen zu den klassischen Grundlagen und Methoden dieser Wissenschaften zerstörten. Während in der Physik vor allem die fortschreitende Erkenntnis der atomaren Erscheinungen eine tiefgehende Erschütterung und Umwälzung hervorrief, war in der Mathematik das überraschende Auftreten von offenen Widersprüchen in scheinbar lückenlos geschlossenen logischen Gedankenketten die entscheidende Ursache, welche die seit Menschengedenken genährte Überzeugung von der unbedingten und absoluten Geltung dieser Wissenschaft ins Wanken brachte, und dies gerade zu einer Zeit, wo sich nach außen hin die Erfolge der Mathematik sowohl in ihrer theoretischen Entwicklung wie in ihrer praktischen Anwendung geradezu überwältigend anhäuften.

Der vom zweiten Verfasser gegebene historische Überblick liefert eine eindrucksvolle Zusammenfassung der bedeutendsten Systeme, welche zur Grundlegung der Mathematik in alter und neuer Zeit erdacht und diskutiert worden sind. Den älteren, „prädikativen" Systemen, die irgendwelche absolute (a priori) Erkenntnisse für den weiteren Aufbau verwenden und denen u. a. auch die Auffassungen von Hermite, Poincaré und Hilbert zugerechnet werden, stehen die neueren „dialektischen" Systeme gegenüber; sie nehmen die experimentellen Erfahrungswissenschaften und die philosophischen Erkenntnistheorien von F. Bacon, Hume und A. Comte zum Vorbild; danach ist die Mathematik eine experimentelle Wissenschaft (M. Fréchet) und die Tatsache des Erfolges ist ausschlaggebend für die einstimmige Anerkennung einer Lösung bei allen

Mathematikern (E. Borel). Alle mit dem Anspruch auf absolute Geltung auftretenden Prinzipien, wie etwa „ewige Wahrheit" oder „reine Vernunft" sind eine nicht zu Recht bestehende Einschränkung der autonomen Freiheit des modernen Menschen gegenüber seiner Erkenntnis; das Wissen braucht keine derartige absolute (a priori) Basis, sondern kontrolliert sich selbst, indem es jeweils die verschiedenen Erkenntniszweige miteinander in Beziehung setzt („la dialectique de la connaissance") und ihre Wahrheit nicht durch eine metaphysische Garantie, sondern vor dem Tribunal des kollektiven Bewußtseins der Wissenschaft („conscience collective de la science") erhärtet; im Prinzip ist daher jede Wahrheit nur provisorisch und einer ständigen Revision unterworfen (M. Gonseth). Eine mathematische Theorie muß daher aus der lebendigen Wissenschaft ausgeschlossen werden, wenn sie mit den andern Wissensgebieten nicht in Verbindung gebracht werden kann, d. h. wenn sie ihren Wert nicht durch die Anwendbarkeit zur Erklärung der physikalischen Wirklichkeit unter Beweis zu stellen vermag (G. Casanova).

Gegenüber diesen extremen und auseinanderstrebenden Richtungen sucht G. Bouligand eine mittlere Linie einzuschlagen; auch er lehnt eine starre, statische Auffassung der Mathematik und ihrer Grundlagen ab und sieht die Entwicklung dieser Wissenschaft in der dialektischen Auseinandersetzung zwischen dem Moment des „Problems", dessen Lösung dem Mathematiker zur Aufgabe gestellt ist, und dem entgegengesetzten Moment der „Synthèse globale", welche die individuellen Probleme und ihre Lösungen durch Bildung allgemeiner Kategorien und Lehrsätze mit Berücksichtigung der bereits gewonnenen Erkenntnisse und mit dem Streben nach möglichster Einfachheit und Allgemeinheit zusammenfaßt („integriert"). Daher entwickelt sich die Mathematik nicht aus einer unveränderlichen und untrüglichen Grundlage heraus, vielmehr bildet die „Synthèse globale" unter dem Drucke der ankommenden Probleme ein System des Wissens, das sich zwar dauernd erweitert, dauernd angepaßt und revidiert werden muß, das aber doch eine gewisse Stabilität beibehält; diese Stabilität soll nicht der Ausdruck eines absoluten Prinzipes sein, sie beruht nur auf einer sich tatsächlich einstellenden Gesetzmäßigkeit („légalité de fait, et non de droit"); sie ist die Frucht der Lebenserfahrung des Menschengeschlechtes und nicht das Dekret einer reinen Vernunfterkenntnis a priori.

Man wird diese neueren Grundlegungen der Mathematik vielleicht nicht mit Unrecht als eine Demokratisierung der Wissenschaft bezeichnen dürfen. Aber genau so wie in der Politik eine gute Monarchie unter Umständen besser sein kann als eine schlechte Demokratie, so wird man auch in der Wissenschaft nicht unbedingt allen Bestrebungen rückhaltlos zustimmen müssen, die auf die Auflösung und Zerstörung jeglicher dogmatischer Bindungen hinzielen. Es ist sicher ein großes Verdienst des vorliegenden Werkes, die Notwendigkeit klar herausgestellt zu haben, daß auch die Grundlagen einer so streng und festgefügten Wissenschaft, wie es die Mathematik ist, ständig diskutiert und revidiert werden müssen, aber daraus scheint mir nicht zu folgen, daß sie aus jeder metaphysischen Verankerung losgelöst werden müssen. Diese Loslösung könnte wohl mit der Einführung einer schrankenlosen Demagogie verglichen werden, da dann auch die Maßstäbe selber, nach denen diskutiert und revidiert werden soll, der völligen Willkür preisgegeben werden und keinerlei Kriterium mehr auffindbar sein kann, um zu entscheiden, weshalb etwa die eine Auffassung einer andern vorgezogen werden müßte. Denn alle hier angeführten Wahrheitskriterien, wie kollektive Übereinstimmung, Bewährung, größte Einfachheit und Allgemeinheit, und ähnliche mehr, sind entweder versteckte Andeutungen eines dahinter wirksamen metaphysischen Prinzips, oder andernfalls reine Willkür.

Das allerdings muß uneingeschränkt zugegeben werden: Das Absolute steht nicht am Anfang der Wissenschaft, sondern an ihrem Ende, es ist nicht der Beginn, sondern das Ziel, dem wir uns nur annähern können, das wir aber niemals im Leben erreichen werden. Daher glaube ich, daß der Titel dieses Buches voll gerechtfertigt ist, denn das, was etwa eine vergangene Zeit noch als absolut angesehen hatte, hat sich inzwischen als relativ und verbesserungsbedürftig herausgestellt. Aber gerade die Tatsache, daß wir es als verbesserungsbedürftig zu erkennen vermögen, scheint mir am deutlichsten zu zeigen, daß wir in der metaphysischen Wurzel unseres Wesens einen absoluten Maßstab besitzen, mit dem wir das von uns Geschaffene prüfen und so der Vollkommenheit immer näher bringen können. *W. Gröbner*, Innsbruck

Differential- und Integralrechnung. Von *O. Haupt*, unter Mitarbeit von *G. Aumann*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von *Ch. Pauc*. (Göschens Lehrbücherei: Band 24) I. Band: Einführung in die reelle Analysis. Mit 2 Textabb., VIII, 218 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1948. DM 18.—.

Das bekannte Werk, welches als eine Art „Infinitesimalrechnung vom höheren Standpunkt aus" eine Sonderstellung in der mathematischen Literatur einnimmt, hat in der Neuauflage, deren erster Band (leider erst zwei Jahre nach Erscheinen!) dem Referenten vorliegt, eine durchgreifende Umarbeitung erfahren. Diese ist in der Richtung erfolgt, noch mehr als in der früheren Gestalt durch weitgehende Abstraktion größtmögliche Allgemeinheit zu erreichen. Während die erste Auflage mit einer naiv-formalen Einführung der reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche einsetzte, wird in dem nun gänzlich den reellen Zahlen gewidmeten ersten Abschnitt nunmehr der Zahlbegriff axiomatisch festgelegt. Auch die Grundbegriffe der Mengenlehre sind in erweitertem Umfang (Auswahlaxiom, Ordnungszahlen) in diesen Abschnitt verlegt. Der Funktionsbegriff wird in einem eigenen (dritten) Abschnitt zunächst in allgemeinster Weise als Abbildung zwischen Mengen eingeführt, bevor er in den folgenden Abschnitten auf die reellen Funktionen reeller Veränderlicher spezialisiert wird. Gänzlich neu aufgenommen ist der letzte (sechste) Abschnitt (allgemeine Grenzwerttheorie), in welchem in Hinblick auf die Verwendung bei der Definition des bestimmten Integrals mit Hilfe der sog. „gerichteten Systeme" der Grenzwertbegriff eine sehr allgemeine Formulierung erhält. Hier finden sich auch die Grundbegriffe über topologische Räume.

Man wird das Buch auch in der neuen Fassung fortgeschrittenen Studenten als Einführung in die reelle Funktionenlehre wärmstens empfehlen können.

J. Radon, Wien

Progressive Mathematics. Von *P. Clyne*. Mit 121 Textabb., XII, 270 S. London: Chapman u. Hall Ltd. 1950. Geb. 15 s. net.

Der Autor ist ein begeisterter Lehrer, der sich mit Erfolg bemüht, die Elemente der höheren Mathematik seinen Schülern beizubringen. Er bedient sich oft geometrischer Überlegungen, macht auf Schwierigkeiten aufmerksam und gibt viele Tricks an. Bei schwierigen Stellen bedient er sich eines Dialoges zwischen Lehrer und Schüler. Das Buch bringt die Differential- und Integralrechnung einschließlich der einfachsten Differentialgleichungen und enthält sehr viele Beispiele aus der reinen und angewandten Mathematik. Die Lehrer an den Mittelschulen und an technischen Lehranstalten können manchen wertvollen Wink für ihren Unterricht aus diesem Buch entnehmen.

N. Hofreiter, Wien

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von *H. Hornich*. Mit 34 Textabb., VII, 216 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 60.—, geb. S 69.—; sfr. 19.80, geb. sfr. 22.—; $ 4.70, geb. $ 5.20; DM 19.50, geb. DM 21.60.

Das Buch Hornichs entspricht dem dringenden Bedürfnis unserer Studierenden nach einer kurzgefaßten, leicht faßlichen, dabei inhaltsreichen und allen Anforderungen an Strenge genügenden Darstellung des wichtigen Stoffgebietes. Man findet darin neben dem, was sozusagen zur Allgemeinbildung des Mathematikers wie auch zum unentbehrlichen Handwerkzeug für die Anwendungen gehört, trotz des engen Rahmens manches, was man sonst nur in ausführlicheren Darstellungen zu suchen gewohnt ist, so den großen Picardschen Satz (der nach Bloch und Landau bewiesen wird), den Satz vom Vitali sowie Riemanns grundlegendes Abbildungstheorem. Überall hat es der Verfasser verstanden, durch geschickte Beweisanordnung auch schwierigere Partien gut lesbar zu gestalten. Besondere Erwähnung verdient das letzte Kapitel „Algebraische Funktionen und ihre Integrale", das vom Verfasser als Krönung des ganzen Gebietes im Geiste seines großen Lehrers Wirtinger gestaltet ist. Diese kurze Darstellung der Grundbegriffe bietet wohl die denkbar beste Vorbereitung zu einem eingehenderen Studium. Der Sonderfall des elliptischen Gebildes leitet naturgemäß zu den elliptischen Funktionen, deren Grundlagen (im Anschluß an die Theorie von Weierstraß) den Abschluß des Bandes bilden.

Erwähnt seien noch die geschickt gewählten Übungsaufgaben am Schluß jedes Kapitels, die insbesondere beim Selbststudium nützlich sein werden. Das Buch wird sicherlich rasch zahlreiche Freunde gewinnen und so auch die vom Verleger aufgewandte Mühe und Sorgfalt lohnen. *J. Radon*, Wien

Einführung in die Differentialgeometrie. Von *W. Blaschke*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LVIII) Mit 57 Textabb., VII, 146 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 16.—, geb. DM 18.60.

In einem schmächtigen Band der „gelben Sammlung" stellt Blaschke seiner dreibändigen Differentialgeometrie eine kurze „Einführung" an die Seite, die sich methodisch grundlegend von diesem bekannten Werk unterscheidet. Sind dort die klassischen Wege beschritten (quadratische Differentialformen, Tensorrechnung), wenn auch wesentlich durch die Vektorschreibweise abgekürzt und geglättet sowie durch zahlreiche neue Ausblicke anziehend gestaltet, so schließt sich der Verfasser in dem neuen Werk an die in Frankreich namentlich von Darboux und E. Cartan eingeführte Methode an, die ein längs der untersuchten Mannigfaltigkeit bewegliches Achsenkreuz zugrundelegt und mit Pfaffschen Formen arbeitet. Das Rechnen mit alternierenden Differentialformen, das namentlich die Integrabilitätsbedingungen mit äußerster Knappheit und Eleganz zu formulieren gestattet, ersetzt hier die Tensorrechnung.

Das Buch Blaschkes gibt auf dieser Grundlage eine überraschend einheitliche und konzentrische Darstellung aller wesentlichen Tatsachen über Kurven und Flächen im euklidischen R_3. Vieles wird man allerdings in den ungemein reichhaltigen, mit „Aufgaben, Lehrsätze" überschriebenen Abschnitten suchen müssen. Dafür steht in den übrigen Teilen des Buches manches, das man in den bisherigen Darstellungen nicht findet: so werden in dem Kurvenkapitel nicht weniger als sieben Beweise für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises dargestellt, Artins schöne Untersuchung über die geodätischen Linien auf dem Grundbereich der Modulgruppe wird ausführlich wiedergegeben u. a. m.

Blaschke's neues Buch ist sowohl als methodische Ergänzung der vorhandenen Lehrbuchliteratur wie auch als Anregung zur Anwendung seiner Methode auf neue Aufgaben sehr zu begrüßen und wir wünschen ihm zahlreiche Leser.

J. Radon, Wien

Non-Euklidean Geometry. Von *H. S. M. Coxeter*. Zweite Auflage. XV, 281 S. Toronto: University of Toronto Press. 1947. $ 4.—.

Wer der Meinung ist, daß die nichteuklidischen Geometrien aus einer abgeschlossenen Menge von Sätzen bestehen, die aus einigen Axiomen in stets gleichbleibender Reihenfolge hergeleitet werden, wird durch dieses neue Buch enttäuscht werden. Man findet darin eine Fülle von geometrischen Sätzen, die man in anderen Darstellungen oft vergeblich suchen wird. Das Buch ist für alle Studenten geeignet, die über einige wenige Grundtatsachen der analytischen Geometrie verfügen. Die ersten drei Kapitel bringen, ausgehend von den Axiomen, eine Einführung in die reelle projektive Geometrie. Bemerkenswert ist, daß der Begriff der projektiven Abbildung konsequent in den Vordergrund gestellt wird. So werden zum Beispiel die Kegelschnitte nach v. Staudt durch das Polarsystem definiert. Das nächste Kapitel dient der Einführung von Koordinaten und zur Erklärung der analytischen Bedeutung der vorher eingeführten Begriffe. Begrüßenswert ist die Weglassung von Summenzeichen bei linearen Transformationen, quadratischen Formen usw. Kapitel V ist der elliptischen Geometrie in einer Dimension gewidmet, was pädagogisch sehr geschickt ist, da hier die Verhältnisse besonders einfach liegen. Es folgt in zwei Kapitel (VI, VII) die elliptische Geometrie in zwei und drei Dimensionen. Als Kongruenztransformationen werden Kollineationen eines geeigneten Kegelschnittes in sich definiert. So kommt man ohne zusätzliche Kongruenzaxiome aus. Kapitel VII ist besonders reich an schönen geometrischen Tatsachen. Es finden sich hier die Cliffordschen Parallelen, ausführliche Diskussion der Bewegungen des elliptischen Raumes in sich, Studysche Linienkoordinaten und vieles andere. Nun folgt die hyperbolische Geometrie in drei Kapiteln, wobei zuerst der Teil aufgebaut wird, der der euklidischen und hyperbolischen Geometrie gemeinsam ist (absolute Geometrie). Nun folgt (Kap. XII) — methodisch interessant — eine Reihe von Sätzen über Kreise und Dreiecke, die in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie ähnlich lauten. Kapitel XII und XIII sind einer rechnerischen Behandlung der Begriffe Abstand, Winkel und Flächeninhalt gewidmet. Ebenso werden die entsprechenden Trigonometrien hier behandelt. Im Schlußkapitel findet man die euklidischen Modelle zusammengestellt. Dieses Kapitel kann auch als Einführung gelesen werden von jemandem, der sich nur im euklidischen Raum auskennt.

Die gesamte Darstellung ist sehr klar und leserlich und immer bemüht, auf dem direktesten Weg vorzugehen. Alles in allem kann gesagt werden, daß jeder, der das Buch studiert, ein schönes Stück Geometrie dazulernen wird.

K. Prachar, Wien

Die Welt der Vektoren. Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren. Von *F. Ollendorff*. Mit 68 Textabb., VIII, 470 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 135.—, geb. S 144.—; sfr. 39.—, geb. sfr. 42.—; $ 9.—, geb. $ 9.50; DM 37.50, geb. DM 40.—.

Obwohl der Titel dieses Buches etwas überschwenglich klingt, genügt doch ein kurzer Blick auf die Fülle des behandelten Stoffes, um zu erkennen, daß er richtig gewählt wurde. Es ist eine ganze Welt von Tatsachen, die hier vor dem Auge des Lesers ersteht. Da das Buch auch Operatoren bringt, sind hier zum

erstenmal Dinge behandelt, die man sonst in einem Lehrbuch der Vektorrechnung nicht darzustellen pflegte. Alles was in der theoretischen Physik Rang und Namen hat, tritt hier als Anwendung auf. Von dem sehr reichen Inhalt wollen wir nur einige derjenigen Kostproben herausgreifen, die das Werk gegenüber anderen kennzeichnen: Ausführliche Behandlung der Raumgitter, relativistische Mechanik und Wellenmechanik, Theorie des Mesons, eine kurze und prägnante Einleitung in die allgemeine Relativitätstheorie usw.... Das Schlußkapitel bringt eine Theorie des Hilbertschen Raumes und einiges über Integralgleichungen. Den Bedürfnissen des Physikers entsprechend wird alles nur formal entwickelt und von Konvergenzbetrachtungen abgesehen. Die genaue Definition dessen, was man als Hilbertschen Raum bezeichnet, erfährt der Leser allerdings dadurch überhaupt nicht. Als Anwendungen finden sich hier der harmonische Oszillator, Spin-Operatoren und anderes mehr.

Der etwas fortgeschrittene Leser wird sich in dieser Welt der Vektoren und Operatoren ohne allzugroße Mühe zurechtfinden können (nicht zuletzt infolge des ausgezeichneten Druckes) und wird so einen guten Einblick in die Methoden gewinnen, mittels deren wir unsere Welt möglichst gut zu beschreiben suchen.

K. Prachar, Wien

Tensor-Calculus. Von *J. L. Synge* und *A. Schild*. IX, 319 S. Toronto: University of Toronto Press. 1949. $ 6.—.

Das Buch ist ein Lehrbuch der Tensorrechnung. An Vorkenntnissen benötigt der Student nur die Grundtatsachen der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie. Die Darstellung beginnt mit Tensoren in einer beliebigen Mannigfaltigkeit und führt dann sofort durch Einführung einer Metrik in die Riemannsche Geometrie. Der Darstellung des Krümmungstensors ist Kapitel 3 gewidmet. Niemals verlieren sich die Betrachtungen ins Formale, sondern die Verfasser sind bestrebt, alle Begriffe geometrisch zu erklären und möglichst natürlich zu entwickeln. Darin ist ein Hauptvorteil des Buches zu sehen. Ein breiter Raum ist den Anwendungen auf die klassische theoretische Physik gewidmet, deren Gesetze in allgemeinen Koordinaten diskutiert werden. Die Relativitätstheorie ist mit Recht beiseite gelassen worden, da es hier sowieso genügend Darstellungen gibt. Ausführlich und sehr sorgfältig sind die mehrdimensionalen Analoga der Integralsätze von Gauß und Stokes behandelt. Den Abschluß bildet eine kurze Einleitung in die nicht — Riemannschen Geometrien. Von großem Wert für den Leser werden die zahlreichen und geschickt gewählten Übungsaufgaben sein, die teils im Text eingestreut und teils am Schlusse jedes der acht Kapitel zusammengestellt wurden. In fast allen Lehrbüchern der Tensorrechnung wird man vergeblich nach solchen Übungsaufgaben suchen. Am Schluß jedes Kapitels findet sich auch eine übersichtliche Zusammenstellung der vorkommenden Begriffe und Formeln.

Die Literatur über Tensorrechnung hat jedenfalls durch dieses Werk eine entschiedene Bereicherung erfahren. Man kann nur wünschen, daß das neue Buch der in Canada erschienenen Reihe mathematischer Monographien auch in Österreich recht viele Leser finden möge.

K. Prachar, Wien

The Theory of Potential and Spherical Harmonics. Von *W. J. Sternberg* und *T. L. Smith*. (Mathematical Expositions: Nr. 3) VIII, 312 S. Toronto: 1946. $ 4.50.

Dies ist tatsächlich ein Lehrbuch der Potentialtheorie. Sauber in der Beweisführung, leicht verständlich, vollständig in der Darbietung der grundlegenden Sätze und Begriffe der Theorie und der dazugehörigen Gegenstände: So findet sich hier eine ausgezeichnete Darstellung der Fredholmschen Theorie der Integralgleichungen und fast ein ganzer Abschnitt ist der Besprechung von

Eigenschaften der Kugelfunktionen und Legendreschen Polynome gewidmet. Ohne Zweifel sind bei vielen Dingen des einen Verf. reichhaltige Göschenbändchen, Potentialtheorie I, II Pate gestanden, aber mit Recht können die Verf. im Vorwort darauf hinweisen, daß es sich keinesfalls um eine Übersetzung der Bändchen, sondern um ein neues Buch handelt. Vor allen Dingen wird vielfach die Vektorschreibweise benützt, wodurch vieles einen prägnanten Ausdruck findet und abgesehen von der weit ausführlicheren Darstellung, zahlreichen Beispielen und Hinweisen auf die physikalische Bedeutung gewisser Begriffe (z. B. wird die Divergenz auch als Kraftfluß im Vektorfeld, der Rotor im Zusammenhang mit der Zirkulation erklärt u. a. m.) ist ganz neu die ausführliche Besprechung der Kugelfunktionen und Legendreschen Polynome, was auch den Titel rechtfertigt.

Ausgehend vom Newtonschen Gravitationsgesetz wird das Newtonsche und logarithmische Potential, das Potential der einfachen und Doppelbelegung eingeführt und das Verhalten im Unendlichen streng abgeleitet. Die wichtigen Integralsätze von Gauß, Stokes, die Greenschen Formeln, der Mittelwertsatz und das Maximumsprinzip folgen. Gelegentlich der Besprechung des analytischen Charakters des Potentials ist der ungezwungene Platz für die erwähnte Darstellung der Kugelfunktionen und Legendreschen Polynome, wo sich z. B. auch die Definition der Legendreschen Funktionen 2. Art und der assoziierten Funktionen findet. Eingehend werden die Stetigkeitseigenschaften der Potentiale und ihrer Normalableitung besprochen und die Dirichletsche Charakterisierung des Potentials wird am Beispiel des Ellipsoides nach Dirichlet eingeübt. Die wichtige Methode der elektrischen Bilder wird kurz behandelt. Der konjugierten Potentialfunktion und der Invarianz des Potentials bei konformer Abbildung ist der nächste Abschnitt gewidmet. Die lesenswerte Einführung in die Randwertprobleme (Dirichletsches, Neumannsches Problem und gemischte Randwertaufgabe) streift auch im Zusammenhang mit dem Dirichletschen Prinzip die „direkten Methoden". Das Poissonsche Integral in der Ebene und die Entwicklung im Kreis führen bis zur Aufstellung der Besselschen Umgleichung für Orthogonalsysteme. Eine originelle Ableitung der Schwarzschen Ungleichung aus der Besselschen ist erwähnenswert. Der Darstellungssatz aus der Theorie der Fourierreihen für stückweise glatte Funktionen wird bewiesen. Es folgen die beiden Harnackschen Sätze über Reihen von Potentialfunktionen und dann wird die analytische Fortsetzung eines regulären Potentials erörtert. Die Greensche Funktion für die erste und zweite Randwertaufgabe werden gegeben und der Zusammenhang mit der konformen Abbildung aufgezeigt. Nun kommt das Poissonsche Integral im Raum und die Folgerungen daraus. Die schon erwähnte Behandlung der Fredholmschen Theorie und die Anwendung auf die Existenztheoreme der Randwertaufgaben der Potentialtheorie beschließen das Buch.

Man sieht die Fülle des hier gebotenen Stoffes. Speziellere Untersuchungen, die tiefergehende Kenntnisse der reellen Funktionenlehre oder komplexen Funktionentheorie verlangen, sind mit Recht nicht aufgenommen worden. Der Leser kommt im allgemeinen mit den Kenntnissen der Differential- und Integralrechnung aus. Gerne wird man das Buch dem Studenten empfehlen, der die Theorie vom Standpunkt des Mathematikers kennen lernen möchte und deren ausführlichere Darstellung dem Mathematiker an unseren Hochschulen aus Zeitmangel nur selten möglich ist und diese dem Physiker überlassen muß. Es bleibt nur noch der Wunsch übrig, das Namen- und Sachverzeichnis etwas reichhaltiger zu gestalten (z. B. H. A. Schwarz wird auf S. 213 genannt, im Namensverzeichnis sucht man vergeblich. Methode der elektrischen Bilder ist ebenfalls dort nicht zu finden). *L. Schmetterer*, Wien

Elektronenoptik. Von *A. A. Rusterholz*. Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik. (Lehr- u. Handbücher der Ingenieurwissenschaften: Bd. 15) Mit 118 Textabb., 249 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. sfr. 25.—, geb. sfr. 29.—.

In den letzten Jahren sind auf dem Gebiet der Elektronenoptik zahlreiche theoretische und experimentelle Fortschritte erzielt worden und es ist daher zu begrüßen, daß es der Verf. unternimmt, die erzielten Ergebnisse darzustellen. Das Hauptgewicht liegt auf der Dimensionierung der elektronenoptischen Systeme. Der vorliegende Band bringt die theoretischen Grundlagen. Das erste Kapitel behandelt zunächst die allgemeinen physikalischen Gesetze der Bewegung des Elektrons im elektrischen und magnetischen Feld. Im zweiten Kapitel werden die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art aufgestellt. Verf. gelangt so zur Einführung des elektronenoptischen Brechungsindex und erreicht damit den Anschluß an die Begriffsbildungen der Lichtoptik. Wie der Verf. hervorhebt, bestehen aber doch grundlegende Unterschiede. In der Elektronenoptik haben wir es fast ausschließlich mit Medien zu tun, deren Brechungsindex eine kontinuierliche Funktion des Ortes ist. Wenn man von den letzten Kapiteln absieht, werden nun ausschließlich rotationssymmetrische Felder zu Grunde gelegt. Zunächst wird das elektrische Feld betrachtet und die Aufgabe behandelt, für eine vorgegebene rotationssymmetrische Elektrodenanordnung und für bestimmte Potentialwerte der Elektroden das Feld zwischen diesen zu berechnen (unter Vernachlässigung der Raumladung), vor allem in der Nähe der Symmetrieachse. Dies läßt sich z. B. durch Reihenentwicklungen durchführen, wenn das Potential auf der Symmetrieachse selbst bekannt ist. Dies läßt sich z. B. für die Lochblende (Henneberg und Glaser und Henneberg) und für die Rohrlinse exakt durchführen. In den meisten Fällen stößt aber die Berechnung auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Hier ist man auf experimentelle Methoden wie z. B. elektrolytischen Trog angewiesen. Am Schluß des dritten Kapitels wird noch das magnetische Feld behandelt. Das vierte Kapitel diskutiert nun die Elektronenbahnen in diesen Feldern. Eine exakte Integration der Bahngleichungen ist natürlich nur in den seltensten Fällen zu erwarten. Man beschränkt sich deshalb sofort auf achsennahe Elektronen (Gaußsche Dioptik) und die verschiedenen Näherungsmethoden, wie sie aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannt sind, werden herangezogen. Es ist nun für den Vergleich dieser Methoden sehr wichtig, Felder zu kennen, für welche die exakte Integration doch durchführbar ist. Ein solches Feld wurde z. B. von Glaser angegeben und in mehreren Arbeiten (auch mit Lammel zusammen) diskutiert. Das fünfte Kapitel behandelt nun die Abbildungseigenschaften solcher Felder, wobei die Lichtoptik als Vorbild dient. Als Beispiele wurden u. a. die Lochblendenlinse, die Rohreinzellinse und die Abbildung durch starke elektrische Linsen genau besprochen. Das sechste Kapitel behandelt die magnetischen und elektrischmagnetischen Elektronenlinsen. Im siebenten Kapitel wird nun die überaus wichtige Theorie der Bildfehler in sehr übersichtlicher Weise dargestellt. Das achte Kapitel behandelt die zweidimensionalen Felder, welche ja in vielen Elektronenröhren eine wichtige Rolle spielen. Hier kann für die Berechnung die Methode der konformen Abbildung herangezogen werden. In komplizierteren Fällen greift man zum elektrolytischen Modell oder zum nicht sehr genauen Gummimembranmodell. Es werden nun die Ablenkfelder (Elektronenprismen) und im neunten Kapitel der Elektronenspiegel besprochen, während das zehnte Kapitel Schlußbemerkungen bringt. Jedes Kapitel ist mit ausführlichen Literaturnachweisen versehen. Die Darstellung der an sich nicht leichten Materie ist ausführlich, übersichtlich und leicht lesbar. Ausstattung und Druck des Buches sind vorzüglich. *E. Hlawka*, Wien

Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Von *P. Gombás*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften: Physikalische Reihe: Band II) Mit 20 Textabb., 268 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. sfr. 24.50, geb. sfr. 29.50.

Der Verf. läßt sich in dem vorliegenden Werk von derselben Absicht leiten, welche auch seinem früheren Buch „Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen", Springer, Wien 1949 (vgl. die Besprechung in dieser Zeitschrift **53**, S. 255) zu Grunde lag. Es soll dem theoretischen Physiker, aber auch dem experimentellen Physiker und dem Chemiker ermöglichen, in den Stoff so einzudringen, daß er selbständig in der Lage ist, die entwickelten Methoden bei konkreten Problemen anzuwenden und bis zu numerischen Resultaten zu gelangen. Eine solche Darstellung lag, so viel ich weiß, bisher nicht vor. Es ist natürlich klar, daß bei der ungeheuren Fülle des Stoffes nur typische Beispiele herausgegriffen werden konnten, aber diese werden bis zu den letzten Einzelheiten durchgeführt. Das erste Kapitel bringt eine Zusammenfassung der grundlegenden Sätze der Wellenmechanik, selbstverständlich das Wasserstoffatom und das Wasserstoffmolekülion und die Störungsrechnung. Das zweite Kapitel bringt die zusammengesetzten Systeme, insbesondere das System aus zwei gleichen Teilchen. Das dritte Kapitel „Atome" behandelt das Atom als Mehrteilchenproblem, insbesondere das Heliumatom, die Slatersche Methode und den Energieausdruck von Hartree und Fock. Im nächsten Kapitel „Moleküle" steht die Heitler-Laudonsche Theorie und das Hund-Millikansche Verfahren im Mittelpunkt. Das fünfte Kapitel behandelt die Statistiken von Bose-Einstein und Fermi-Dirac, während das sechste Kapitel die zweite Quantelung in einer sehr durchsichtigen Weise darstellt. Damit schließt der erste Teil, welcher die allgemeine Theorie behandelt, ab.

Der zweite Teil gibt nun die tatsächlichen Lösungsmethoden und gerade dieser Teil verleiht dem Buch die besondere Bedeutung. Das siebente Kapitel behandelt die Variationsverfahren. Es wird eingehend erläutert, wie man die Variationsansätze zu wählen hat. Dies ist gerade für die Praxis wichtig, denn viele Autoren lassen den Ansatz einfach vom Himmel fallen. Dann folgt das Ritzsche Verfahren, die Methode der Koordinatenstreckung und die Methode von Hylleraas. Diese Methoden werden z. B. am Grundzustand des Heliumatoms nach Hylleraas vollkommen durchgeführt. Überhaupt ist dieses Kapitel, das längste und wichtigste des Buches, als besonders schön zu bezeichnen. Es folgt dann das halbempirische Verfahren von Slater zur Bestimmung von Näherungseigenfunktionen beliebiger Atome und die Anwendung der entwickelten Verfahren auf Molekülprobleme, wie z. B. das Wasserstoff- und Li_2-Molekül. Dann folgt das Verfahren von Hellmann, welches eine Kombination einer vereinfachten Störungsrechnung mit Variationsverfahren darstellt. Diese Methode wird auf die Berechnung der Polarisierarbeit von Atomen angewendet. Das nächste Kapitel behandelt die Methode des „self-consistent-field" nach Hartree und ihre Verfeinerung von Fock. Diese Methode ist bekanntlich sehr leistungsfähig, ist aber numerisch mit ungeheurer Rechenarbeit verbunden. Das neunte Kapitel behandelt die statistische Methode, welche ja der Verf. in dem oben zitierten Werk bereits ausführlich dargestellt hat. Ein Anhang bringt mathematische Formeln, Koordinatensysteme und eine Liste der grundlegenden Ein- und Zweizentrenintegrale. Die Darstellung des Stoffes ist hervorragend und das Werk als Standardwerk auf diesem Gebiet zu bezeichnen. Die Ausstattung und Druck sind, wie man bei dem Verlag gewohnt ist, sehr gut.

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Johann Radon, Wien XVIII., Herbeckstraße 5. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Prof. Dr. phil. **A. Duschek**, Wien

In vier Bänden

Band I. Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. 1949.
S 78.—, sfr. 33.90, $ 7.80, DM 26.—. Geb. S 87.—, sfr. 37.80, $ 8.70, DM 29.—

Band II. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie. Ausgleichsrechnung. Lineare Gleichungen und Determinanten. Mit etwa 170 Textabbildungen. Etwa 350 Seiten.
Erscheint im Herbst 1950.

Band III. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Variationsrechnung. *In Vorbereitung.*

Band IV. Grundzüge der Funktionentheorie. *In Vorbereitung.*

Jeder Band ist einzeln käuflich.

„... Die Vorzüge des Buches, dem die reiche Lehrerfahrung des Verfassers zugute gekommen ist, bestehen vor allem in der strengen, dabei aber ausführlichen und klaren Darstellung. Eine wertvolle Bereicherung bilden außerdem die zahlreichen Beispiele, die die Tragweite der Methoden erläutern, die Übungsaufgaben mit dem am Schluß des Buches angegebenen Lösungen sowie die Hinweise auf die Lebensverhältnisse und das Wirken vieler bedeutender Mathematiker aller Zeiten."
Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien.

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung

Von

Prof. Dr. phil. **A. Duschek**, Wien, und Dr. techn. **A. Hochrainer**, Wien

In drei Teilen

Teil I: **Tensoralgebra.** Zweite Auflage. Mit 26 Textabbildungen. IV, 129 Seiten. 1948.
S 27.—, sfr. 12.—, $ 2.70, DM 9.—.

Teil II: **Tensoranalysis.** Mit 64 Textabbildungen. VII, 338 Seiten. 1950.
S 78.—, sfr. 26.—, $ 6.—, DM 24.80.

Teil III: **Anwendungen in Physik und Technik.** *In Vorbereitung.*

„... Die in großer Zahl vorhandenen Lehrbücher der Tensorrechnung sind meist zu schwierig für den Anfänger. Das vorliegende Buch bildet eine Ausnahme, indem es — bei wissenschaftlich einwandfreier Form — die Tensoralgebra in leicht faßlicher Weise entwickelt. Ein übersichtlich gefaßter Abriß der Vektoralgebra erleichtert dem Leser den Zugang zum Hauptgegenstand des Buches. Aufbau und Darstellung der Theorie eignen sich vorzüglich zum Selbststudium für Ingenieure, Physiker und Mathematiker, welche eine der üblichen Vorlesungen über analytische Geometrie in vektorieller Behandlung gehört haben."
Bulletin des SEV, Zürich.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria